

---

**Nombres complexes.**

---

**Forme algébrique et calculs****Exercice 1.** *Calculs en forme algébrique*

Écrire sous forme algébrique :

$$(2 + 3i)(1 - i), \quad (3 - 2i)^2, \quad \frac{1}{2 + i}, \quad \frac{1 + 2i}{3 - i}.$$

**Exercice 2.** *Équations d'inconnue complexe*

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$(a) (2 + i)z - 3i = 1 + i, \quad (b) 2z + 3\bar{z} = 5 + i.$$

**Exercice 3.** *Puissances et binôme de Newton*

En développant à l'aide du binôme de Newton, écrire sous forme algébrique  $(1 + 2i)^3$  puis  $(2 - i)^4$ .

**Exercice 4.** *Sommes géométriques dans  $\mathbb{C}$* 

Calculer, à l'aide de la formule de la somme géométrique :

$$(a) \sum_{k=0}^9 i^k, \quad (b) \sum_{k=0}^4 (1 + i)^k, \quad (c) \sum_{k=2}^5 (2i)^k.$$

**Exercice 5.** *Factorisation de  $z^n - w^n$* 

- a) Factoriser  $z^5 - 32$  à l'aide de la factorisation de  $z^n - w^n$ .  
b) Soit  $n \geq 2$  et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^n = 1$  et  $z \neq 1$ . Montrer que  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ . Que dit ce résultat pour  $z = i$  et  $n = 4$ , puis pour  $z = j = e^{2i\pi/3}$  et  $n = 3$  ?

**Plan complexe, conjugué et module****Exercice 6.** *Module et conjugué*

Calculer :

$$(a) |3 - 4i|, \quad (b) \left| \frac{1 + i}{2 - i} \right|, \quad (c) |(1 + i)^8|, \quad (d) \overline{(2 + i)(1 - 3i)}.$$

**Exercice 7.** *Ensembles de points*

Déterminer et représenter l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant :

$$(a) |z - 1| = |z + i|, \quad (b) |z - 2i| = 3, \quad (c) |z + 1 - i| \leq 2.$$

**Exercice 8.** *Caractérisation des imaginaires purs*

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , et  $Z = \frac{z+1}{z-1}$ . Montrer que  $Z$  est un imaginaire pur si et seulement si  $|z| = 1$ .

Indication :  $Z$  est un imaginaire pur si et seulement si  $Z + \bar{Z} = 0$ .

**Exercice 9.** *Inégalité triangulaire et cas d'égalité*

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| = 2$ .

- a) À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que  $1 \leq |z - 1| \leq 3$ .  
b) À l'aide du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, déterminer les nombres  $z$  pour lesquels  $|z - 1| = 3$ , puis ceux pour lesquels  $|z - 1| = 1$ .

## Notation exponentielle et forme trigonométrique

### Exercice 10. Forme exponentielle

Déterminer le module et un argument, puis la forme exponentielle, de :

$$(a) 1 + i, \quad (b) \sqrt{3} - i, \quad (c) -1 + i\sqrt{3}, \quad (d) -4i.$$

### Exercice 11. Retour à la forme algébrique

Écrire sous forme algébrique :

$$4e^{i\pi/6}, \quad 2e^{-3i\pi/4}, \quad e^{2i\pi/3}.$$

### Exercice 12. Équations d'inconnue réelle avec $e^{ix}$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , à l'aide de l'égalité de deux exponentielles d'imaginaires purs :

$$(a) e^{3ix} = e^{ix}, \quad (b) e^{i(2x-\pi/3)} = e^{i(x+\pi/6)}, \quad (c) e^{ix} = -e^{3ix}.$$

### Exercice 13. Formule de Moivre

Calculer, à l'aide de la forme exponentielle :

$$(a) (1 + i)^{12}, \quad (b) (1 - i\sqrt{3})^9, \quad (c) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2026}.$$

### Exercice 14. Linéarisation

À l'aide des formules d'Euler, linéariser  $\cos^3(x)$  puis  $\sin^4(x)$ .

### Exercice 15. Transformation de $a \cos x + b \sin x$

- a) Écrire  $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x)$  sous la forme  $A \cos(x + \varphi)$ .
- b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = 1$ .
- c) Déterminer le maximum et le minimum sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto 3 \cos(x) + 4 \sin(x)$ .

### Exercice 16. Factorisation par l'angle moitié

- a) Pour  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , déterminer le module et un argument de  $1 - e^{i\theta}$ .
- b) Pour  $\theta \in ]\pi, 2\pi[$ , déterminer le module et un argument de  $1 + e^{i\theta}$  (attention au signe de  $\cos \frac{\theta}{2}$ ).
- c) Appliquer b) à  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ , et vérifier le résultat en calculant directement  $1 + e^{4i\pi/3}$  sous forme algébrique.

### Exercice 17. Formes exponentielles de sommes

Écrire sous forme exponentielle (avec un module positif) :

$$(a) e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4}, \quad (b) e^{i\pi/2} - e^{i\pi/6}, \quad (c) 1 + e^{i\pi/3}.$$

### Exercice 18. Transformation de sommes en produits

- a) Factoriser  $\cos(2x) - \cos(4x)$ .
- b) Calculer  $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$ .
- c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(3x) = \sin(x)$ .

### Exercice 19. Sommes trigonométriques

- a) Calculer  $\sum_{k=0}^3 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$  et  $\sum_{k=0}^3 \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ , d'abord à l'aide des valeurs remarquables, puis avec la formule du cours.
- b) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos(2kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(2kx)$ .
- c) Soit  $n \geq 1$  et  $\theta = \frac{2\pi}{n+1}$ . Montrer que  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = 0$ , et interpréter géométriquement ce résultat.

## Racines carrées et équations du second degré

### Exercice 20. Racines carrées sous forme algébrique

Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de  $3 + 4i$ , de  $5 - 12i$  et de  $8 - 6i$ .

### Exercice 21. Équations du second degré à coefficients complexes

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$(a) z^2 + 2z + 5 = 0, \quad (b) z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0.$$

Pour (b), on pourra remarquer que  $(1 - i)^2 = -2i$ .

### Exercice 22. Somme et produit

Déterminer deux nombres complexes dont la somme vaut 4 et le produit vaut 5.

### Exercice 23. Équation bicarrée dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ .

## Racines $n$ -ièmes

### Exercice 24. Racines cubiques de l'unité

- a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 1$ , et donner les solutions sous formes exponentielle et algébrique. On notera  $j = e^{2i\pi/3}$ .
- b) Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$ .
- c) Placer les trois solutions sur le cercle trigonométrique. Quelle est la nature du triangle ainsi formé ?

### Exercice 25. Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , sous formes exponentielle puis algébrique :

$$(a) z^4 = -16, \quad (b) z^3 = 8i.$$

## Géométrie plane

### Exercice 26. Triangle équilatéral

Soient  $A, B, C$  les points d'affixes respectives  $a = 1 + i$ ,  $b = 3 + i$  et  $c = 2 + (1 + \sqrt{3})i$ . Calculer  $\frac{c-a}{b-a}$ , et en déduire la nature du triangle  $ABC$ .

### Exercice 27. Alignement et orthogonalité

- a) Les points  $A(1)$ ,  $B(2 + i)$  et  $C(3 + 2i)$  sont-ils alignés ?
- b) Soient  $O(0)$ ,  $B(2 + i)$  et  $C(-1 + 2i)$ . Montrer que le triangle  $OBC$  est rectangle isocèle en  $O$ .

### Exercice 28. Rotation et homothétie

Soit  $\Omega$  le point d'affixe  $\omega = 1 + i$ , et  $A$  le point d'affixe 3.

- a) Écrire l'expression complexe  $z' = f(z)$  de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , et déterminer l'affixe de l'image de  $A$ .
- b) Même question pour l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport 2.

## Exponentielle complexe et applications à l'analyse

### Exercice 29. Calculs avec l'exponentielle complexe

Écrire sous forme algébrique  $e^{2+i\pi/3}$ ,  $e^{\ln 3 - i\pi/4}$  et  $e^{-1+i\pi}$ . Déterminer ensuite le module et un argument de  $e^{3-2i}$ .

### Exercice 30. Équations avec l'exponentielle

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , à l'aide de la caractérisation de l'égalité de deux exponentielles :

$$(a) e^z = -2, \quad (b) e^z = 1 + i, \quad (c) e^{2z} = i.$$

### Exercice 31. Exponentielle et conjugaison

- a) Montrer que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .
- b) En déduire que  $e^z$  est réel si et seulement si  $\text{Im}(z) \in \pi\mathbb{Z}$ .

### Exercice 32. Dérivées de fonctions à valeurs complexes

Calculer la dérivée, sur  $\mathbb{R}$ , de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{(2+i)x}, \quad g(x) = (1 + i)e^{-ix}, \quad h(x) = xe^{ix}.$$

### Exercice 33. Primitives par la méthode complexe

À l'aide de la méthode de la partie 9.3, déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de :

$$(a) x \mapsto e^{2x} \cos(x), \quad (b) x \mapsto e^{-x} \sin(2x).$$

### Exercice 34. Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx, \quad (b) \int_0^{\pi} e^{-x} \sin(x) dx.$$

### Exercice 35. Linéarisation et primitive

En linéarisant  $\cos^2(x)$ , déterminer une primitive de  $x \mapsto e^x \cos^2(x)$ .

## Pour aller plus loin

**Exercice 36.** *Exercice plus difficile : l'équation  $z^2 = \bar{z}$*

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 = \bar{z}$ . On pourra commencer par passer aux modules.

## Corrigés

### Forme algébrique et calculs

**Exercice 1.**  $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$  ;  $(3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i$  ;  
 $\frac{1}{2 + i} = \frac{2 - i}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$  ;  $\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{10} = \frac{3 + i + 6i + 2i^2}{10} = \frac{1 + 7i}{10}$ .

**Exercice 2.** (a)  $(2 + i)z = 1 + 4i$ , donc  $z = \frac{1 + 4i}{2 + i} = \frac{(1 + 4i)(2 - i)}{5} = \frac{2 - i + 8i - 4i^2}{5} = \frac{6 + 7i}{5}$ . (b) On pose  $z = a + ib$  :  $2z + 3\bar{z} = 5a - ib$ , donc  $5a - ib = 5 + i$  donne  $a = 1$  et  $b = -1$  :  $z = 1 - i$ .

**Exercice 3.**  $(1 + 2i)^3 = 1 + 3(2i) + 3(2i)^2 + (2i)^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$ .  $(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$ , puis  $(2 - i)^4 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$ .

**Exercice 4.** (a) Comme  $i \neq 1$  et  $i^{10} = i^2 = -1$  :  $\sum_{k=0}^9 i^k = \frac{1 - i^{10}}{1 - i} = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i$ . (b)

$(1 + i)^5 = (1 + i)^4(1 + i) = -4(1 + i)$ , donc  $\sum_{k=0}^4 (1 + i)^k = \frac{1 - (1 + i)^5}{1 - (1 + i)} = \frac{5 + 4i}{-i} = (5 + 4i)i = -4 + 5i$ .

(c) Premier terme  $(2i)^2 = -4$ , raison  $2i$ , quatre termes :  $-4 \times \frac{1 - (2i)^4}{1 - 2i} = \frac{-4(1 - 16)}{1 - 2i} = \frac{60}{1 - 2i} = \frac{60(1 + 2i)}{5} = 12 + 24i$ .

**Exercice 5.** a)  $z^5 - 32 = z^5 - 2^5 = (z - 2)(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16)$ . b) On a  $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ . Si  $z^n = 1$ , le membre de gauche est nul ; comme  $z - 1 \neq 0$ , c'est le second facteur qui est nul :  $1 + z + \dots + z^{n-1} = 0$ . Pour  $z = i$  et  $n = 4$  :  $1 + i - 1 - i = 0$ . Pour  $z = j$  et  $n = 3$  : on retrouve  $1 + j + j^2 = 0$ .

### Plan complexe, conjugué et module

**Exercice 6.** (a)  $|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$ . (b)  $\left| \frac{1 + i}{2 - i} \right| = \frac{|1 + i|}{|2 - i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ . (c)  $|(1 + i)^8| = |1 + i|^8 = (\sqrt{2})^8 = 16$ . (d)  $(2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i$ , donc le conjugué vaut  $5 + 5i$ .

**Exercice 7.** (a) Avec  $A(1)$  et  $B(-i)$ , la condition s'écrit  $MA = MB$  : c'est la **médiatrice** de  $[AB]$ . En posant  $z = x + iy$  :  $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = 2y + 1 \Leftrightarrow y = -x$ , droite d'équation  $y = -x$ .

(b) La condition s'écrit  $MC = 3$  avec  $C(2i)$  : **cercle** de centre  $C(0, 2)$  et de rayon 3. (c)  $|z - (-1 + i)| \leq 2$  : **disque fermé** de centre  $D(-1, 1)$  et de rayon 2.

**Exercice 8.** Pour  $z \neq 1$ ,  $\bar{Z} = \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} - 1}$ , donc

$$Z + \bar{Z} = \frac{(z + 1)(\bar{z} - 1) + (\bar{z} + 1)(z - 1)}{(z - 1)(\bar{z} - 1)} = \frac{(z\bar{z} - z + \bar{z} - 1) + (z\bar{z} - \bar{z} + z - 1)}{|z - 1|^2} = \frac{2|z|^2 - 2}{|z - 1|^2}.$$

Ainsi  $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ .

**Exercice 9.** a) Inégalité triangulaire :  $|z - 1| \leq |z| + |-1| = 3$ . Par ailleurs  $2 = |z| = |(z - 1) + 1| \leq |z - 1| + 1$ , donc  $|z - 1| \geq 1$ . b) On a  $|z - 1| = 3 = |z| + |-1|$  si et seulement si  $z$  et  $-1$  sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire  $z = -t$  avec  $t \geq 0$  ; comme  $|z| = 2$ ,  $z = -2$  (et on vérifie  $|-2 - 1| = 3$ ). De même,  $|z - 1| = 1$  équivaut à l'égalité  $|z| = |z - 1| + 1$ , c'est-à-dire que  $z - 1$  et  $1$  sont colinéaires de même sens :  $z - 1 = t \geq 0$ , et  $|z| = |1 + t| = 2$  donne  $t = 1$ , soit  $z = 2$ .

### Notation exponentielle et forme trigonométrique

**Exercice 10.** (a)  $r = \sqrt{2}$ ,  $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  :  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ . (b)  $r = 2$ ,  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{6}$  :  $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$ . (c)  $r = 2$ ,  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  :  $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$ . (d)  $r = 4$ ,  $\cos \theta = 0$ ,  $\sin \theta = -1$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  :  $-4i = 4e^{-i\pi/2}$ .

**Exercice 11.**  $4e^{i\pi/6} = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2\sqrt{3} + 2i$  ;  $2e^{-3i\pi/4} = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$  ;  $e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

**Exercice 12.** (a)  $3x \equiv x [2\pi] \iff 2x \equiv 0 [2\pi] \iff x \equiv 0 [\pi]$ . (b)  $2x - \frac{\pi}{3} \equiv x + \frac{\pi}{6} [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . (c) Comme  $-1 = e^{i\pi}$ , on a  $-e^{3ix} = e^{i(3x+\pi)}$ , et l'équation équivaut à  $x \equiv 3x + \pi [2\pi]$ , soit  $2x \equiv -\pi [2\pi]$ , soit  $x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

**Exercice 13.** (a)  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ , donc  $(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}e^{3i\pi} = 64 \times (-1) = -64$ . (b)  $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$ , donc  $(1-i\sqrt{3})^9 = 2^9e^{-3i\pi} = 512 \times (-1) = -512$ . (c)  $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$ , donc le nombre vaut  $i^{2026}$ ; comme  $2026 = 4 \times 506 + 2$ ,  $i^{2026} = i^2 = -1$ .

**Exercice 14.**

$$\cos^3 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{2\cos(3x) + 6\cos x}{8} = \frac{\cos(3x) + 3\cos x}{4},$$

$$\sin^4 x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{(2i)^4} = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16},$$

$$\text{soit } \sin^4 x = \frac{2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6}{16} = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}.$$

**Exercice 15.** a)  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = -1$ , donc  $a - ib = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$  ( $A = 2$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ) :  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos(x + \frac{\pi}{6})$ . b) Ici  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $a - ib = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$ , donc  $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$ ; l'équation devient  $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ , soit  $x - \frac{\pi}{3} \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$ , donc  $\mathcal{S} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . c)  $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , donc  $3\cos x + 4\sin x = 5\cos(x + \varphi)$  pour un certain  $\varphi$  : le maximum vaut 5 et le minimum  $-5$  (atteints car  $\cos(x + \varphi)$  prend les valeurs  $\pm 1$ ).

**Exercice 16.** a)  $1 - e^{i\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\theta/2}$ . Comme  $\frac{\theta}{2} \in ]0, \pi[$ ,  $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ , et  $-i = e^{-i\pi/2}$  : module  $2\sin \frac{\theta}{2}$  et argument  $\frac{\theta-\pi}{2}$ . b)  $1 + e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\theta/2}$ . Comme  $\frac{\theta}{2} \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ,  $\cos \frac{\theta}{2} < 0$  : on écrit  $-1 = e^{i\pi}$ , d'où  $1 + e^{i\theta} = -2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\theta/2+\pi)}$ , de module  $-2\cos \frac{\theta}{2}$  et d'argument  $\frac{\theta}{2} + \pi$ . c) Pour  $\theta = \frac{4\pi}{3}$  : module  $-2\cos \frac{2\pi}{3} = 1$  et argument  $\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ , soit  $1 + e^{4i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$ . Directement,  $1 + e^{4i\pi/3} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\pi/3}$ .

**Exercice 17.** (a) On factorise par  $e^{i\pi/2}$  :  $e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4} = 2\cos(-\frac{\pi}{4})e^{i\pi/2} = \sqrt{2}e^{i\pi/2}$ . (b) On factorise par  $e^{i\pi/3}$  :  $e^{i\pi/2} - e^{i\pi/6} = 2i\sin(\frac{\pi}{6})e^{i\pi/3} = ie^{i\pi/3} = e^{5i\pi/6}$ . (c)  $1 + e^{i\pi/3} = 2\cos(\frac{\pi}{6})e^{i\pi/6} = \sqrt{3}e^{i\pi/6}$ .

**Exercice 18.** a)  $\cos(2x) - \cos(4x) = -2\sin(-x)\sin(3x) = 2\sin(x)\sin(3x)$ . b)  $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = 2\cos(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . c)  $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$ , donc l'équation équivaut à  $\sin x = 0$  ou  $\cos(2x) = 0$ , soit  $x \equiv 0 [\pi]$  ou  $x \equiv \frac{\pi}{4} [\frac{\pi}{2}]$ .

**Exercice 19.** a) Avec les valeurs remarquables :  $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 0$  pour la somme des cosinus, et  $0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \sqrt{3}$  pour celle des sinus. Avec la formule ( $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $n = 3$ ) :  $\frac{\sin(2\pi/3)}{\sin(\pi/6)} = \sqrt{3}$ , donc les sommes valent  $\sqrt{3}\cos \frac{\pi}{2} = 0$  et  $\sqrt{3}\sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{3}$ . b) On applique la formule avec  $\theta = 2x \not\equiv 0 [2\pi]$  :  $\sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} \cos(nx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(2kx) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} \sin(nx)$ . c) Ici  $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$  car  $n \geq 1$ , et  $\sin \frac{(n+1)\theta}{2} = \sin \pi = 0$  : les deux sommes sont nulles. Géométriquement, les points d'affixes  $e^{ik\theta}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) sont les  $n+1$  racines  $(n+1)$ -ièmes de l'unité, et la somme de leurs affixes est nulle : leur isobarycentre est  $O$ .

## Racines carrées et équations du second degré

**Exercice 20.** On pose  $z = a + ib$  de carré  $w$ , avec  $a^2 - b^2 = \operatorname{Re}(w)$ ,  $2ab = \operatorname{Im}(w)$  et  $a^2 + b^2 = |w|$ . Pour  $3 + 4i$  :  $|w| = 5$ , donc  $a^2 = 4$ ,  $b^2 = 1$ ,  $ab > 0$  :  $\pm(2 + i)$ . Pour  $5 - 12i$  :  $|w| = 13$ , donc  $a^2 = 9$ ,  $b^2 = 4$ ,  $ab < 0$  :  $\pm(3 - 2i)$ . Pour  $8 - 6i$  :  $|w| = 10$ , donc  $a^2 = 9$ ,  $b^2 = 1$ ,  $ab < 0$  :  $\pm(3 - i)$ .

**Exercice 21.** (a)  $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$ , donc  $z = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ . (b)  $\Delta = (3+i)^2 - 4(2+2i) = 9 + 6i - 1 - 8 - 8i = -2i = (1-i)^2$ , donc  $z = \frac{3+i \pm (1-i)}{2}$ , soit  $z = 2$  ou  $z = 1 + i$ .

**Exercice 22.** Deux nombres de somme  $S = 4$  et de produit  $P = 5$  sont les racines de  $z^2 - Sz + P = z^2 - 4z + 5 = 0$  :  $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$ , donc  $z = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$ .

**Exercice 23.** On pose  $Z = z^2$  :  $Z^2 + 3Z - 4 = 0$  a pour racines  $Z = 1$  et  $Z = -4$  (somme  $-3$ , produit  $-4$ ). Alors  $z^2 = 1$  donne  $z = \pm 1$ , et  $z^2 = -4$  donne  $z = \pm 2i$ .  $S = \{1, -1, 2i, -2i\}$ .

## Racines $n$ -ièmes

**Exercice 24.** a) Les racines cubiques de l'unité sont  $e^{2ik\pi/3}$  pour  $k = 0, 1, 2$  :  $1, j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  et  $j^2 = e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . b)  $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$  (ou :  $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$  car  $j^3 = 1$  et  $j \neq 1$ ). c) Ces trois points sont sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, régulièrement espacés d'un angle  $\frac{2\pi}{3}$  : ils forment un **triangle équilatéral**.

**Exercice 25.** (a)  $-16 = 16e^{i\pi}$  :  $z = re^{i\theta}$  avec  $r^4 = 16$ , soit  $r = 2$ , et  $4\theta \equiv \pi [2\pi]$ , soit  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ . Quatre solutions :  $2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1+i)$ ,  $2e^{3i\pi/4} = \sqrt{2}(-1+i)$ ,  $2e^{5i\pi/4} = \sqrt{2}(-1-i)$ ,  $2e^{7i\pi/4} = \sqrt{2}(1-i)$ . (b)  $8i = 8e^{i\pi/2}$  :  $r^3 = 8$  donne  $r = 2$ , et  $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  donne  $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ . Trois solutions :  $2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$ ,  $2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i$ ,  $2e^{3i\pi/2} = -2i$ .

## Géométrie plane

**Exercice 26.**  $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ . Son module vaut 1, donc  $AC = AB$ , et son argument vaut  $\frac{\pi}{3}$ , donc l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  vaut  $\frac{\pi}{3}$  : le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$  avec un angle de  $\frac{\pi}{3}$ , donc **équilatéral**.

**Exercice 27.** a)  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+2i}{1+i} = 2 \in \mathbb{R}$  : les points sont **alignés**. b)  $\frac{z_C - z_O}{z_B - z_O} = \frac{-1+2i}{2+i} = \frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i+4i+2}{5} = \frac{2+3i}{5} = i$ . Ce quotient est un imaginaire pur, donc  $(OB) \perp (OC)$  ; il est de module 1, donc  $OC = OB$ . Le triangle  $OBC$  est rectangle isocèle en  $O$ .

**Exercice 28.** a)  $z' - \omega = i(z - \omega)$ , donc  $z' = iz + \omega(1-i) = iz + (1+i)(1-i) = iz + 2$ . Pour  $A(3)$  :  $z' = 3i + 2$ . b)  $z' - \omega = 2(z - \omega)$ , donc  $z' = 2z - \omega = 2z - 1 - i$ . Pour  $A(3)$  :  $z' = 6 - 1 - i = 5 - i$ .

## Exponentielle complexe et applications à l'analyse

**Exercice 29.**  $e^{2+i\pi/3} = e^2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{e^2}{2} + \frac{\sqrt{3}e^2}{2}i$  ;  $e^{\ln 3 - i\pi/4} = 3e^{-i\pi/4} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$  ;  $e^{-1+i\pi} = e^{-1}e^{i\pi} = -e^{-1}$ . Enfin  $e^{3-2i} = e^3e^{-2i}$  a pour module  $e^3$  et pour argument  $-2\pi$  (modulo  $2\pi$ ).

**Exercice 30.** (a)  $-2 = 2e^{i\pi} = e^{\ln 2 + i\pi}$ , donc  $e^z = e^{\ln 2 + i\pi} \iff z - (\ln 2 + i\pi) \in 2i\pi\mathbb{Z}$  :  $z = \ln 2 + (2k+1)i\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (b)  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = e^{\frac{1}{2}\ln 2 + i\pi/4}$ , donc  $z = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{i\pi}{4} + 2ik\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (c)  $i = e^{i\pi/2}$ , donc  $e^{2z} = e^{i\pi/2} \iff 2z - \frac{i\pi}{2} \in 2i\pi\mathbb{Z}$ , soit  $z = \frac{i\pi}{4} + ik\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 31.** a) Avec  $z = a + ib$  :  $\overline{e^z} = \overline{e^a(\cos b + i \sin b)} = e^a(\cos b - i \sin b) = e^a e^{-ib} = e^{a-ib} = e^{\bar{z}}$ . b)  $e^z \in \mathbb{R} \iff \overline{e^z} = e^z \iff e^{\bar{z}} = e^z \iff z - \bar{z} \in 2i\pi\mathbb{Z}$ . Or  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ , donc la condition équivaut à  $2i \operatorname{Im}(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire  $\operatorname{Im}(z) \in \pi\mathbb{Z}$ .

**Exercice 32.**  $f'(x) = (2+i)e^{(2+i)x}$ .  $g'(x) = (1+i)(-i)e^{-ix} = (1-i)e^{-ix}$ .  $h'(x) = e^{ix} + x \cdot ie^{ix} = (1+ix)e^{ix}$ .

**Exercice 33.** (a)  $a = 2, b = 1$  :  $\frac{e^{(2+i)x}}{2+i} = \frac{e^{2x}(\cos x + i \sin x)(2-i)}{5} = \frac{e^{2x}}{5} [(2 \cos x + \sin x) + i(2 \sin x - \cos x)]$ . La partie réelle donne la primitive  $x \mapsto \frac{e^{2x}}{5} (2 \cos x + \sin x)$ . (b)  $a = -1, b = 2$  :  $\frac{e^{(-1+2i)x}}{-1+2i} = \frac{e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)(-1-2i)}{5} = \frac{e^{-x}}{5} [(-\cos 2x + 2 \sin 2x) + i(-2 \cos 2x - \sin 2x)]$ . La partie imaginaire donne la primitive  $x \mapsto -\frac{e^{-x}}{5} (2 \cos(2x) + \sin(2x))$ .

**Exercice 34.** (a) Avec  $a = b = 1$ , une primitive de  $e^x \cos x$  est  $F(x) = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$ , donc l'intégrale vaut  $F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$ . (b) Avec  $a = -1, b = 1$  : une primitive de  $e^{-x} \sin x$  est

$G(x) = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)$ , donc l'intégrale vaut  $G(\pi) - G(0) = \frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$ .

**Exercice 35.**  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ , donc  $e^x \cos^2 x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x \cos(2x)}{2}$ . D'après le cours (exemple de la partie 9.3), une primitive de  $e^x \cos(2x)$  est  $\frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$  ; une primitive de  $e^x \cos^2 x$  est donc

$$x \mapsto \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{10} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)).$$

### Pour aller plus loin

**Exercice 36.** En passant aux modules,  $|z|^2 = |z|$ , donc  $|z| = 0$  ou  $|z| = 1$ . Si  $|z| = 0$ ,  $z = 0$  (qui convient). Si  $|z| = 1$ , alors  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  et l'équation devient  $z^2 = \frac{1}{z}$ , soit  $z^3 = 1 : z \in \{1, j, j^2\}$ . Réciproquement, ces trois nombres sont de module 1 et vérifient  $z^3 = 1$ , donc  $z^2 = \frac{1}{z} = \bar{z}$ .  $\mathcal{S} = \{0, 1, j, j^2\}$  avec  $j = e^{2i\pi/3}$ .