

Exo 8 Si $\gamma \neq 1$, alors on note $Z = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$

Prouver : $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |\gamma| = 1$

$$Z = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$$

$$\Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{\bar{\gamma}+1}{\bar{\gamma}-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\gamma+1)(\bar{\gamma}-1) + (\bar{\gamma}+1)(\gamma-1)}{(\gamma-1)(\bar{\gamma}-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\gamma\bar{\gamma}} - \cancel{\gamma} + \bar{\gamma} - 1 + \bar{\gamma}\gamma - \bar{\gamma} + \gamma - 1}{(\gamma-1)(\bar{\gamma}-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\gamma\bar{\gamma} - 2 = 0 \Leftrightarrow \gamma\bar{\gamma} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\gamma|^2 = 1$$

Puisque $|\gamma| \geq 0$, ceci équivaut à $|\gamma| = 1$ $\square$

BONUS Si $u, v \in \mathbb{C}$, à quelle(s) condition(s) a-t-on :

$$(E) |u + iv|^2 = u^2 + v^2$$

Bien sûr, ceci est vrai si $u, v \in \mathbb{R}$
mais est-ce le seul cas ?

$$(E) \Leftrightarrow (u+iv)(\overline{u+iv}) = u^2 + v^2$$

$$\Leftrightarrow (u+iv)(\bar{u} - i\bar{v}) = (u+iv)(u-iv)$$

$$\Leftrightarrow (u+iv)[(\bar{u} - i\bar{v}) - (u-iv)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+iv)[\bar{u} - u + i(v-\bar{v})] = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u+iv=0} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \bar{u} - u + i(v-\bar{v}) = 0 \\ i(v-\bar{v}) = u - \bar{u} \end{cases}$$

$$\text{Or } u - \bar{u} = 2i \operatorname{Im}(u) \in i\mathbb{R}$$

$$i(v-\bar{v}) = i(2i \operatorname{Im}(v)) = -2 \operatorname{Im}(v) \in \mathbb{R}$$

$$u = a + ib$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$\bar{u} = a - ib$$

$$u - \bar{u} = 2ib$$

$$\text{donc } i(v-\bar{v}) = u - \bar{u} \Leftrightarrow \begin{cases} v - \bar{v} = 0 \\ u - \bar{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ainsi, (E) est vraie ssi :

$$u = -iv \quad \text{ou} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

COURS

Factorisation de $z^n - w^n$

Si $z, w \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$ un entier, calculons :

$$D = (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + z^{n-3}w^2 + \dots + z^2w^{n-3} + z^1w^{n-2} + z^0w^{n-1})$$

$$D = z^n + z^{n-1}w + z^{n-2}w^2 + \dots + z^3w^{n-3} + z^2w^{n-2} + z^1w^{n-1} - z^{n-1}w - z^{n-2}w^2 - \dots - z^2w^{n-2} - z^1w^{n-1} - w^n$$

$$D = z^n - w^n$$

On a donc :

$$\boxed{z^n - w^n = (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + z^2w^{n-2} + z^1w^{n-1} + w^n)}$$

$$\boxed{z^n - w^n = (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k}$$

Sommes géométriques :

Si $r \neq 1$, on en déduit avec $n = 1$ et $n+1$ où la place de n

$$r^{n+1} - 1 = (r-1)(r^n + r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r^2 + r + 1)$$

d'où :

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Ex: $r = 1+i$, $n=3$

$$S = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 = \frac{(1+i)^4 - 1}{(1+i) - 1}$$

$$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$$

$$S = \frac{-4-1}{i} = \frac{-5 \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{5i}{1} = 5i$$

Factorisation par les racines des polynômes

$$S: P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

est un polynôme à coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$,

et que $\alpha \in \mathbb{C}$, alors on peut factoriser :

$$P(r) - P(\alpha) = (r - \alpha) Q(r)$$

où $Q(r)$ est un polynôme (de degré $n-1$ si P est de degré n)

En particulier, si α est racine de P (i.e. $P(\alpha) = 0$), $P(r)$ se factorise par $(r - \alpha)$.

Ex: $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$ $P(2) = 8 - 2 \times 4 + 2 - 2 = 0$

$$P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c) \text{ où } a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c$$

$$P(z) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-2 \\ c-2b=1 \\ -2c=-2 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

$$P(z) = (z-2)(z^2 + 1)$$

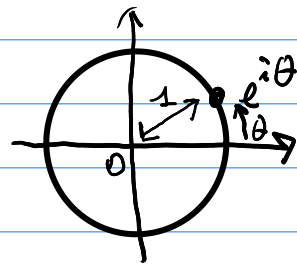
$$P(z) = (z-2)(z+i)(z-i)$$

Les racines de P sont : 2, -i, i.

IV Notation exponentielle

S: $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$$



Propriétés : S: $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$(i) \quad e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$(iii) \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$$

$$(iv) \quad (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$$

$$(v) \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$(vi) \quad |e^{i\theta}| = 1$$

Rq : Qui sont les $z \in \mathbb{C}$ t.q. :

$$\frac{1}{z} = \overline{z} \quad ?$$

$$1 = z \overline{z}$$

$$1 = |z|^2$$

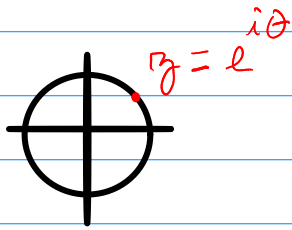
$$1 = |z|$$

Preuve : On fait juste celle de (i) :

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} e^{i\varphi} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\
 &= \cos \theta \cos \varphi + i \cos \theta \sin \varphi + i \sin \theta \cos \varphi + i^2 \sin \theta \sin \varphi \\
 &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi) \\
 &= \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) \\
 &= e^{i(\theta + \varphi)} \quad \square
 \end{aligned}$$

N.B. : On note $U = \{ \eta \in \mathbb{C} \mid |\eta| = 1 \}$

l'ensemble des complexes unimodulaires,



on a aussi :

$$U = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$$

(c'est le cercle trigonométrique)

Égalité Si $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

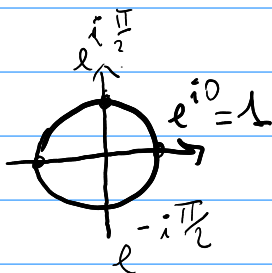
$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Rightarrow \theta = \varphi + 2\pi k$$

$$(\Rightarrow) \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \varphi + 2k\pi$$

$$e^{i0} = 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$



$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

2) Formule de Moivre

Si $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

(C'est la formule vue ci-dessus (propriété (iv))

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Ex: Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$
en fⁿ de $\cos \theta$ et $\sin \theta$

puis de même avec $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$