

Nombres complexes

PCSI

1 Construction de $\mathbb{C}$, forme algébrique

1.1 Motivation : l'équation $x^2 + 1 = 0$

Dans $\mathbb{R}$, un carré est toujours positif ou nul : l'équation $x^2 = -1$ n'a donc **aucune solution réelle**. L'idée, pour résoudre ce problème, est d'**inventer** un nouveau nombre, noté i , vérifiant $i^2 = -1$, puis de construire un ensemble de nombres contenant à la fois $\mathbb{R}$ et ce nombre i , sur lequel on sait additionner et multiplier en prolongeant les règles de calcul usuelles.

Remarque

Historiquement, ces nombres sont apparus non pas pour résoudre $x^2 + 1 = 0$ (que l'on peut se contenter de déclarer « sans solution »), mais pour résoudre certaines équations du troisième degré à **solutions réelles**, dont les formules de résolution faisaient malgré tout apparaître des racines carrées de nombres négatifs.

1.2 L'ensemble des nombres complexes

Définition

On admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$, et qui vérifient les mêmes règles de calcul (commutativité, associativité, distributivité) ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$;
- tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Forme algébrique

L'écriture $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) est appelée **forme algébrique** de z . Le réel a est appelé **partie réelle** de z , noté $\operatorname{Re}(z)$; le réel b est appelé **partie imaginaire** de z , noté $\operatorname{Im}(z)$.

Attention

La partie imaginaire $\operatorname{Im}(z)$ est un **nombre réel** (le réel b , et non ib) ! C'est une confusion fréquente : $z = 3 - 2i$ a pour partie imaginaire -2 , et non $-2i$.

Unicité de la forme algébrique

Pour tous réels a, b, a', b' :

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier, $a + ib = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$.

Remarque

C'est ce théorème d'unicité qui permet **d'identifier** les parties réelle et imaginaire de part et d'autre d'une égalité entre deux nombres complexes : c'est une méthode de calcul fondamentale, que l'on utilisera constamment dans ce chapitre.

1.3 Opérations et règles de calcul

Pour calculer avec les nombres complexes en forme algébrique, on développe comme dans $\mathbb{R}$, en remplaçant systématiquement i^2 par -1 dès qu'il apparaît.

Exemple

Soient $z = 2 + 3i$ et $w = 1 - i$.

$$z + w = (2 + 1) + (3 - 1)i = 3 + 2i.$$

$$z \times w = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i - 3(-1) = 5 + i.$$

Remarque

Plus généralement, pour $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$:

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b'), \quad (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Attention

Il n'existe **pas** de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations, comme il en existe une sur $\mathbb{R}$: des écritures comme « $z < w$ » ou « $z \geq 0$ » n'ont **aucun sens** pour des nombres complexes non réels. On ne compare jamais deux complexes avec $<$ ou $\leq$.

1.4 Réels, imaginaires purs**Définition**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

- z est **réel** si $\text{Im}(z) = 0$, c'est-à-dire $z = a \in \mathbb{R}$;
- z est **imaginaire pur** si $\text{Re}(z) = 0$, c'est-à-dire $z = ib$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Remarque

Le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur est 0.

2 Le plan complexe

2.1 Affixe d'un point, d'un vecteur

Définition

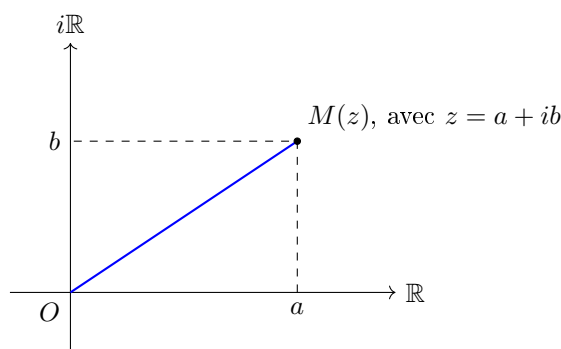
Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on associe à tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) le point $M(a, b)$, appelé **point image** de z ; réciproquement, z est appelé **affixe** du point M , noté $z = \text{aff}(M)$ (ou z_M).

De même, on appelle affixe du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) le nombre complexe $z_{\vec{u}} = a + ib$.

Cette correspondance $z \longleftrightarrow M(a, b)$ est une **bijection** de $\mathbb{C}$ sur le plan : le plan muni de cette correspondance est appelé **plan complexe**.

Remarque

Par définition même, $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ sont les coordonnées de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$: l'axe (Ox) , formé des points d'affixe réelle, est appelé **axe des réels** ; l'axe (Oy) , formé des points d'affixe imaginaire pure, est appelé **axe des imaginaires purs**.



C'est cette représentation qui va nous permettre, dans toute la suite du chapitre, de donner une **interprétation géométrique** systématique des notions introduites sur les nombres complexes (conjugué, module, argument...).

Traduction des opérations

Pour deux points A, B d'affixes z_A, z_B :

- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$;
- l'affixe de $A + \vec{u}$ (translaté de A par $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$) est $z_A + z_{\vec{u}}$;
- l'affixe du milieu I de $[AB]$ est $\frac{z_A + z_B}{2}$.

3 Conjugué et module

Remarque

Convention pour les schémas. À partir de maintenant, sur les schémas, on ne donne plus de nom aux points : on se contente d'écrire leur **affiche**. En effet, l'afixe d'un point détermine entièrement ce point (et réciproquement), si bien que l'on peut parler du « point z » comme on parle du nombre complexe z : il paraît superflu de nommer en plus ce point M , A , etc. Seule l'origine du repère garde son nom habituel O (c'est le point d'afixe 0).

3.1 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$). On appelle **conjugué** de z , noté $\bar{z}$, le nombre complexe

$$\bar{z} = a - ib.$$

Exemple

Si $z = 3 - 5i$, alors $\bar{z} = 3 + 5i$. Si $z = 7$ (réel), alors $\bar{z} = 7 = z$. Si $z = 4i$ (imaginaire pur), alors $\bar{z} = -4i = -z$.

Propriétés du conjugué

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

- (i) $\bar{\bar{z}} = z$;
- (ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- (iii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;
- (iv) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$;
- (v) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$;
- (vi) si $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$;
- (vii) si $z \neq 0$ et $w \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

Remarque

Les deux relations (iv) et (v) permettent d'exprimer partie réelle et partie imaginaire uniquement à l'aide de z et $\bar{z}$:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Caractérisation des réels et imaginaires purs

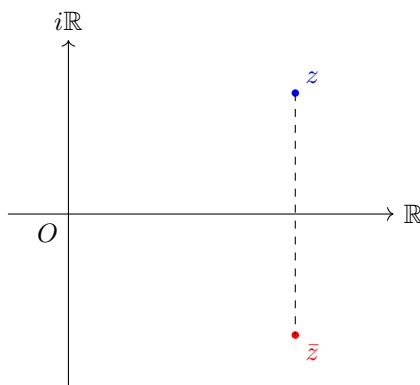
Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z, \quad z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z.$$

Démonstration. $z = a + ib \in \mathbb{R} \iff b = 0 \iff a - ib = a + ib \iff \bar{z} = z$. De même, $z \in i\mathbb{R} \iff a = 0 \iff a - ib = -(a + ib) \iff \bar{z} = -z$. ■

Interprétation géométrique du conjugué

Le point d'affixe $\bar{z}$ est le **symétrique** du point d'affixe z par rapport à l'axe (Ox) (car $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$).

**Remarque**

De même, le point d'affixe $-z$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à O (symétrie centrale, cf. partie 5.3 du chapitre sur les fonctions usuelles) : $\operatorname{Re}(-z) = -\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(-z) = -\operatorname{Im}(z)$.

3.2 Module d'un nombre complexe**Définition**

Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$). On appelle **module** de z , noté $|z|$, le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque

On vérifie immédiatement que $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, donc

$$z\bar{z} = |z|^2,$$

ce qui fournit une seconde manière, souvent très utile en calcul, de retrouver le module.

Attention

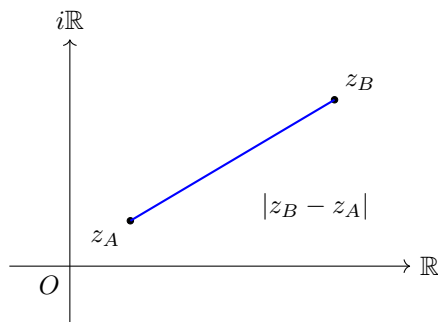
Si $z = a \in \mathbb{R}$, on retrouve $|z| = \sqrt{a^2}$, qui est bien la valeur absolue usuelle de a (cf. chapitre 0, partie 2) : le module prolonge donc la valeur absolue à $\mathbb{C}$ tout entier, et on utilise d'ailleurs les mêmes notations $|\cdot|$.

Module et distance

Pour deux points A, B d'affixes z_A, z_B :

$$AB = |z_B - z_A|.$$

En particulier, pour un point M d'affixe z , $OM = |z|$: le module de z est la **distance à l'origine** du point image de z .

**Propriétés du module**

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

- (i) $|z| \geq 0$;
- (ii) $|z| = 0 \iff z = 0$;
- (iii) $|\bar{z}| = |z|$;
- (iv) $|-z| = |z|$;
- (v) $|zw| = |z||w|$;
- (vi) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ si $w \neq 0$;
- (vii) $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration (propriété (v)). $|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$. Comme $|zw|$ et $|z||w|$ sont deux réels positifs de carrés égaux, ils sont égaux. ■

Partie réelle, partie imaginaire et module

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad \text{avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R},$$

$$|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|, \quad \text{avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration. Écrivons $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$). Comme $b^2 \geq 0$, on a $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 = \operatorname{Re}(z)^2$, donc, par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$|z| \geq \sqrt{a^2} = |a| = |\operatorname{Re}(z)|.$$

Il y a égalité si et seulement si $a^2 + b^2 = a^2$, c'est-à-dire $b = 0$, c'est-à-dire $z \in \mathbb{R}$. Le raisonnement est identique pour $\operatorname{Im}(z)$, en échangeant les rôles de a et b . ■

Inégalité triangulaire, cas d'égalité

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Si $z \neq 0$, il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $w = \lambda z$.

Démonstration. On calcule, en utilisant $z\bar{z} = |z|^2$ et la linéarité de la conjugaison :

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}.$$

Or $w\bar{z} = \overline{z\bar{w}}$, donc $z\bar{w} + w\bar{z} = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$, d'où

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}).$$

D'après le théorème précédent, appliqué au nombre complexe $z\bar{w}$:

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w|,$$

donc

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.$$

Comme $|z + w|$ et $|z| + |w|$ sont deux réels positifs, on en déduit, par croissance de la racine carrée, $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Cas d'égalité. Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement s'il y a égalité dans $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}|$, c'est-à-dire, d'après le cas d'égalité du théorème précédent, si et seulement si $z\bar{w} \in \mathbb{R}_+$.

Supposons $z \neq 0$. Si $z\bar{w} = t \in \mathbb{R}_+$, alors $\bar{w} = \frac{t}{z}$, d'où, en conjuguant (et comme t est réel, $\bar{\bar{t}} = t$) :

$$w = \overline{\left(\frac{t}{z}\right)} = \frac{t}{\bar{z}} = \frac{tz}{z\bar{z}} = \frac{t}{|z|^2} z,$$

donc $w = \lambda z$ avec $\lambda = \frac{t}{|z|^2} \geq 0$. Réciproquement, si $w = \lambda z$ avec $\lambda \geq 0$, alors $z\bar{w} = z\overline{\lambda z} = \lambda z\bar{z} = \lambda|z|^2 \geq 0$. ■

Remarque

Géométriquement, $w = \lambda z$ avec $\lambda \geq 0$ signifie que les points O , $M(z)$ et $M'(w)$ sont **alignés**, avec M et M' du même côté de O (ou $M' = O$) : l'inégalité triangulaire est une égalité exactement quand le « triangle » OMM' est **aplati**, les trois points étant alignés dans le même sens.

Remarque

L'inégalité triangulaire porte ce nom car, une fois les nombres complexes interprétés comme des points du plan (partie 2), elle traduit le fait qu'un côté d'un triangle est toujours plus court que la somme des deux autres — sauf si le triangle est aplati, ce que précise le cas d'égalité ci-dessus.

3.3 Méthode : calcul de l'inverse et du quotient

Méthode

Pour mettre l'inverse (ou un quotient) de nombres complexes sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le **conjugué du dénominateur**, afin de faire apparaître $z\bar{z} = |z|^2$ au dénominateur, qui devient alors réel :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0).$$

Remarque

Cette méthode est exactement analogue à celle de la **quantité conjuguée** utilisée pour lever une indétermination avec une racine carrée (chapitre 0, partie 3.3) : dans les deux cas, on multiplie par une quantité « conjuguée » pour faire disparaître une racine (ici, la racine de -1 cachée dans i).

Exemple

Mettons $\frac{1}{3+4i}$ sous forme algébrique. On a $|3+4i|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, donc

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i.$$

De même, pour un quotient $\frac{z}{w}$, on multiplie haut et bas par $\bar{w}$:

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+i+2i^2}{1+4} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i.$$

3.4 Méthode : calcul d'une puissance à l'aide du binôme de Newton**Formule du binôme de Newton**

Pour calculer une puissance $(a+b)^n$ avec n petit, on généralise les identités remarquables déjà connues :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Les coefficients qui apparaissent dans ces développements (1, 2, 1 puis 1, 3, 3, 1 puis 1, 4, 6, 4, 1) se retrouvent très simplement à l'aide du **triangle de Pascal** :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Chaque ligne commence et se termine par 1 ; chaque coefficient intérieur s'obtient en **additionnant les deux coefficients situés juste au-dessus de lui**, sur la ligne précédente. La ligne numéro n (en comptant à partir de 0 pour la première ligne) donne alors les coefficients du développement de $(a+b)^n$.

Exemple

Calculons $(1+i)^4$ à l'aide de la ligne 1, 4, 6, 4, 1 du triangle de Pascal :

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4.$$

Comme $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$, il vient

$$(1+i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

3.5 Méthode : factorisation de $z^n - w^n$, sommes géométriques, racines d'un polynôme

Factorisation de $z^n - w^n$

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z^n - w^n = (z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}),$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}.$$

Démonstration. Développons le membre de droite :

$$(z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} w^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k}.$$

En posant $j = k + 1$ dans la première somme, on voit que les termes se simplifient deux à deux (somme « télescopique ») :

$$\sum_{j=1}^n z^j w^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k} = z^n w^0 - z^0 w^n = z^n - w^n. \quad \blacksquare$$

Exemple

En particulier, pour $w = 1$: $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$. Par exemple, $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$: les solutions de $z^3 = 1$ sont donc $z = 1$ et les racines de $z^2 + z + 1 = 0$, c'est-à-dire $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Somme géométrique

Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, cette somme vaut $n + 1$.

Démonstration. Si $q = 1$, la somme comporte $n + 1$ termes égaux à 1. Si $q \neq 1$, la factorisation précédente, appliquée à $z = 1$, $w = q$ et à l'exposant $n + 1$, donne

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k,$$

et il suffit de diviser par $1 - q \neq 0$. ■

Remarque

Plus généralement, pour $q \neq 1$ et $0 \leq p \leq n$, on retient la formule sous la forme

$$\sum_{k=p}^n q^k = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Attention

La formule de la somme géométrique est valable pour tout $q \in \mathbb{C}$ **distinct de 1**, y compris pour un nombre complexe non réel comme $q = i$ ou $q = e^{i\theta}$. Le cas $q = 1$ doit toujours être traité à part, car il conduirait à une division par 0.

Exemple

Avec $q = i$ et $n = 7$: $\sum_{k=0}^7 i^k = \frac{1 - i^8}{1 - i} = \frac{1 - 1}{1 - i} = 0$. Avec $q = 1 + i$ et $n = 3$, comme $(1 + i)^4 = -4$:

$$\sum_{k=0}^3 (1 + i)^k = \frac{1 - (1 + i)^4}{1 - (1 + i)} = \frac{5}{-i} = 5i.$$

Factorisation de $P(z) - P(a)$

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes ($n \in \mathbb{N}^*$, $a_k \in \mathbb{C}$), et soit $a \in \mathbb{C}$. Il existe un polynôme Q de degré au plus $n - 1$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) - P(a) = (z - a)Q(z).$$

Si $a_n \neq 0$, Q est de degré exactement $n - 1$, de coefficient dominant a_n .

Démonstration. Le terme a_0 disparaît dans la différence, et on factorise chaque $z^k - a^k$:

$$P(z) - P(a) = \sum_{k=1}^n a_k (z^k - a^k) = \sum_{k=1}^n a_k (z - a) \sum_{j=0}^{k-1} z^j a^{k-1-j}.$$

On met $z - a$ en facteur : $P(z) - P(a) = (z - a)Q(z)$, avec $Q(z) = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j a^{k-1-j}$, qui est un polynôme de degré au plus $n - 1$. Le seul terme en z^{n-1} est celui obtenu pour $k = n$ et $j = n - 1$, de coefficient a_n . ■

Racine d'un polynôme et factorisation

Soient P un polynôme à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Alors

$$P(a) = 0 \iff P(z) = (z - a)Q(z) \text{ pour un certain polynôme } Q.$$

En particulier, un polynôme non nul de degré n admet **au plus n racines complexes**.

Démonstration. Si $P(a) = 0$, le théorème précédent donne $P(z) = P(z) - P(a) = (z - a)Q(z)$. Réciproquement, si $P(z) = (z - a)Q(z)$, alors $P(a) = 0$.

Montrons la dernière affirmation par récurrence sur le degré n . Un polynôme de degré 0 est une constante non nulle, qui n'a aucune racine. Si P est de degré $n \geq 1$ et admet une racine a , alors $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec Q de degré $n - 1$; toute autre racine de P (différente de a) est une racine de Q , qui en a au plus $n - 1$ par hypothèse de récurrence. Donc P a au plus $1 + (n - 1) = n$ racines. ■

Factoriser un polynôme dont on connaît une racine

Si l'on connaît une racine a d'un polynôme P de degré n , on écrit $P(z) = (z - a)Q(z)$, où Q est de degré $n - 1$ à coefficients inconnus, que l'on détermine par **identification** des coefficients. Il reste ensuite à chercher les racines de Q , de degré plus petit.

Exemple

Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$. On remarque que $P(2) = 8 - 8 + 2 - 2 = 0$, donc $P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$. En développant,

$$(z - 2)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b - 2)z^2 + (c - 2b)z - 2c.$$

Par identification, $b - 2 = -2$, $c - 2b = 1$ et $-2c = -2$, d'où $b = 0$ et $c = 1$. Ainsi

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + 1) = (z - 2)(z - i)(z + i),$$

et les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont 2, i et $-i$.

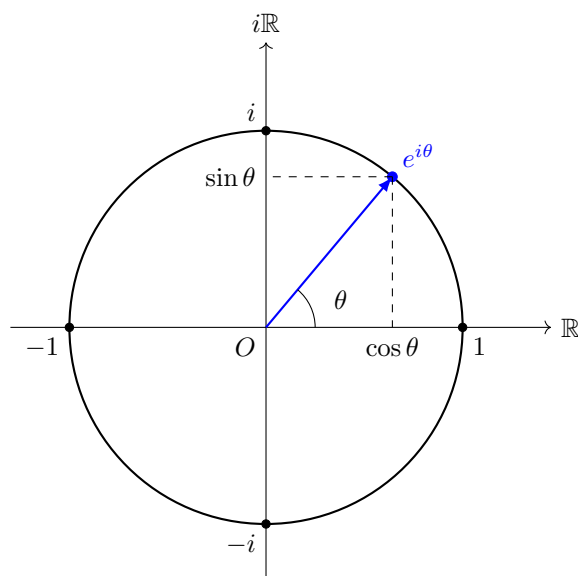
4 Notation exponentielle

4.1 Définition et propriétés

Définition

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta.$$



Le nombre $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ est donc l'affixe du point de coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$ du cercle trigonométrique : le cercle trigonométrique est exactement l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque

Cette notation n'est **a priori** qu'une simple abréviation d'écriture. Elle se justifie *a posteriori* par le fait que cette fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ vérifie les mêmes règles de calcul que l'exponentielle réelle (théorème ci-dessous) : on prolonge ainsi la notion d'exponentielle aux nombres imaginaires purs, ce qui est généralisé à tout nombre complexe dans la dernière partie du chapitre (partie 9).

Règles de calcul

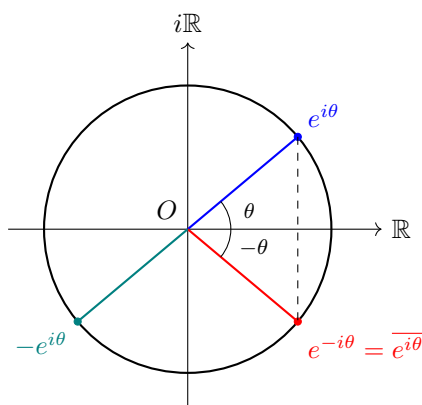
Pour tous réels θ, φ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

- (i) $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$;
- (ii) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- (iii) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$;
- (iv) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$;
- (v) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- (vi) $|e^{i\theta}| = 1$.

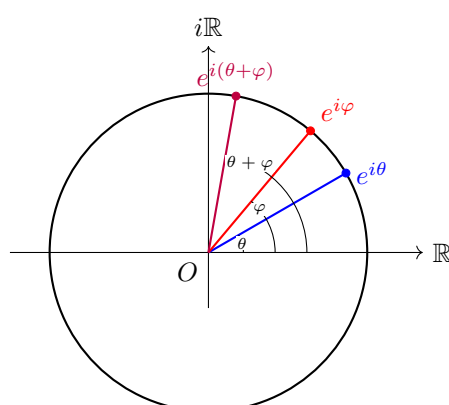
Démonstration (propriété (i)). C'est exactement la formule d'addition pour $\cos$ et $\sin$ (chapitre sur les fonctions usuelles, partie 2.7) :

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi),$$

qui vaut $\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) = e^{i(\theta+\varphi)}$ d'après les formules d'addition. ■



Conjugué (symétrique par rapport à (Ox)) et opposé (symétrique par rapport à O).



Produit : les angles s'ajoutent, ici $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.

Égalité de deux exponentielles d'imaginaires purs

Pour tous réels θ, φ :

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi [2\pi].$$

Exemple

On retiendra en particulier les valeurs remarquables : $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/2} = -i$, $e^{2ik\pi} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque

L'égalité $e^{i\pi} = -1$, reliant les cinq constantes $e, i, \pi, 1, 0$ par $e^{i\pi} + 1 = 0$, est souvent citée comme l'une des plus belles formules des mathématiques (formule d'Euler).

4.2 Formule de Moivre**Formule de Moivre**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. C'est la traduction, en notation trigonométrique, de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. ■

Méthode

La formule de Moivre, combinée à la formule du binôme de Newton, permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$: on développe $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$, puis on identifie parties réelle et imaginaire avec $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Exemple

Exprimons $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$. D'après la formule du binôme :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta.$$

En identifiant la partie réelle avec $\cos(3\theta)$:

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

4.3 Formules d'Euler et applications**Formules d'Euler**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On a $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$; il suffit d'ajouter (resp. de soustraire) ces deux égalités et d'isoler $\cos \theta$ (resp. $\sin \theta$). ■

Linéarisation

Les formules d'Euler permettent de **linéariser** une expression comme $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$, c'est-à-dire de l'exprimer comme une combinaison de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ (utile, par exemple, pour calculer une primitive) : on remplace $\cos \theta$ (ou $\sin \theta$) par sa formule d'Euler, on développe avec le binôme de Newton, puis on regroupe les termes conjugués $e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} =$

$$2 \cos(k\theta).$$

Exemple

Linéarisons $\cos^2 \theta$. D'après la formule d'Euler et le binôme de Newton :

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 2}{4},$$

$$\text{soit} \quad \cos^2 \theta = \frac{2 \cos(2\theta) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2},$$

formule que l'on retrouve aussi directement à partir de $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$ (chapitre sur les fonctions usuelles, partie 2.7).

5 Argument et forme trigonométrique (ou exponentielle)

5.1 Argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z \neq 0$ d'affixe M , de module $r = |z| > 0$. Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon r : on peut donc repérer sa position par l'angle $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, exactement comme pour le point $M(\theta)$ du cercle trigonométrique (chapitre sur les fonctions usuelles, partie 2.1), à ceci près que le rayon vaut ici r et non 1.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (c'est-à-dire $z \neq 0$). On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, une mesure en radian de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, où M est le point d'affixe z . Il n'est défini qu'à **un multiple de 2π près** :

$$\arg(z) [2\pi]$$

(cf. la notion de congruence modulo 2π , chapitre sur les fonctions usuelles, partie 2.8).

Attention

Le nombre 0 n'a **pas d'argument** : son point image est le centre O du cercle, et aucun angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OO})$ n'est défini.

5.2 Forme trigonométrique, forme exponentielle

Puisque $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (partie 4.1), les écritures « trigonométrique » et « exponentielle » d'un nombre complexe ne diffèrent que par la notation : on les réunit donc en une seule.

Forme trigonométrique (ou exponentielle)

Tout nombre complexe $z \neq 0$, de module $r = |z|$ et d'argument $\theta = \arg(z)$, s'écrit

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}.$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** ou **forme exponentielle** de z . Réciproquement, si $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$, alors $\rho = |z|$ et $\alpha = \arg(z) [2\pi]$.

Justification. Par définition du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, le point $M(\theta)$ de ce cercle a pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$. Le point d'affixe z est à distance r de O , dans la direction repérée par l'angle θ : ses coordonnées sont donc $(r \cos \theta, r \sin \theta)$, c'est-à-dire $z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$.

Méthode

Pour déterminer le module et un argument de $z = a + ib$:

1. on calcule $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
2. on cherche θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$ (ces deux conditions déterminent θ de façon unique modulo 2π , contrairement à une seule d'entre elles) ;
3. on conclut : $z = re^{i\theta}$.

Exemple

Déterminons le module et un argument de $z = 1 + i\sqrt{3}$. On a $r = \sqrt{1+3} = 2$, puis $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$: d'après les valeurs remarquables (chapitre sur les fonctions usuelles, partie 2.2), $\theta = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Ainsi

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Attention

Il ne suffit pas de calculer $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ pour obtenir θ : cette formule ne donne un argument correct que si $a > 0$ (elle ignore sinon le signe de a , donc le quadrant dans lequel se trouve M). Le plus sûr est toujours de vérifier **les deux** conditions sur $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

5.3 Propriétés de l'argument

Théorème

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

- (i) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) [2\pi]$;
- (ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$;
- (iii) $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) [2\pi]$;
- (iv) $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$;
- (v) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$;
- (vi) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$.

Justification. Ces propriétés découlent directement de l'écriture en forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, $w = se^{i\varphi}$, et des règles de calcul sur $e^{i\theta}$ (partie 4.1) : par exemple, $zw = rs e^{i(\theta+\varphi)}$, où $rs > 0$, donne par identification $|zw| = rs = |z||w|$ et $\arg(zw) = \theta + \varphi [2\pi]$.

Remarque

La propriété (i), $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) [2\pi]$, est la plus importante de cette liste : **multiplier deux complexes revient à multiplier les modules et additionner les arguments**. C'est elle qui explique, par exemple, pourquoi multiplier par i (de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$) revient géométriquement à effectuer un quart de tour direct.

5.4 Méthode : transformation de $a \cos x + b \sin x$ en $A \cos(x + \varphi)$ **Transformation de $a \cos x + b \sin x$**

Pour transformer une expression de la forme $a \cos x + b \sin x$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) en une expression de la forme $A \cos(x + \varphi)$:

1. on remarque que $a \cos x + b \sin x = \operatorname{Re}((a - ib) e^{ix})$;
2. on écrit $a - ib$ sous forme exponentielle : $a - ib = A e^{i\varphi}$, où $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ vérifie $\cos \varphi = \frac{a}{A}$, $\sin \varphi = -\frac{b}{A}$;
3. on conclut : $a \cos x + b \sin x = \operatorname{Re}(A e^{i\varphi} e^{ix}) = \operatorname{Re}(A e^{i(x+\varphi)}) = A \cos(x + \varphi)$.

Exemple

Transformons $\cos x + \sin x$. Ici $a = b = 1$, donc $A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et φ vérifie $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\varphi = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$. Ainsi

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Remarque

Cette écriture est particulièrement utile pour résoudre une équation (ou une inéquation) du type $a \cos x + b \sin x = c$, ou pour déterminer le maximum et le minimum de $a \cos x + b \sin x$ sur $\mathbb{R}$, qui valent respectivement A et $-A$.

5.5 Méthode : factorisation par l'angle moitié**Factorisation par l'angle moitié**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}, \quad 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}.$$

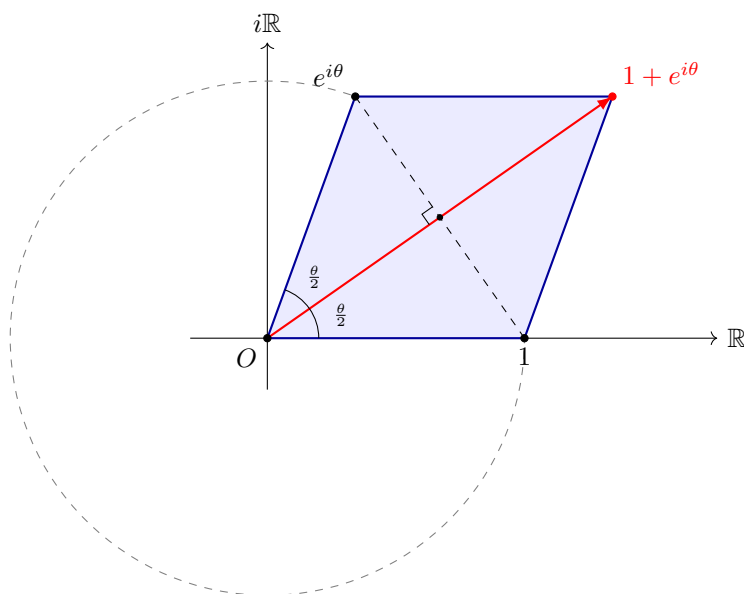
Démonstration. On factorise par $e^{i\theta/2}$, puis on utilise les formules d'Euler (partie 4.3) :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2},$$

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}. \quad \blacksquare$$

Remarque

Interprétation géométrique. Considérons les points d'affixes 0 , 1 , $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$. Puisque l'affixe $1 + e^{i\theta}$ est la somme des affixes 1 et $e^{i\theta}$, ces quatre points forment un parallélogramme, dont deux côtés consécutifs ont même longueur ($|1| = |e^{i\theta}| = 1$) : c'est un **losange**. Ses diagonales sont les bissectrices de ses angles et se coupent perpendiculairement en leur milieu. Ainsi la diagonale joignant 0 à $1 + e^{i\theta}$ est la bissectrice de l'angle de mesure θ formé par les points 1 et $e^{i\theta}$, donc $\arg(1 + e^{i\theta}) = \frac{\theta}{2}$. Dans le triangle rectangle formé par 0 , par le point 1 et par le milieu de cette diagonale, l'hypoténuse vaut 1 et l'angle en 0 vaut $\frac{\theta}{2}$: la demi-diagonale mesure $\cos \frac{\theta}{2}$, donc $|1 + e^{i\theta}| = 2 \cos \frac{\theta}{2}$. L'autre diagonale, perpendiculaire à la première, joint les points $e^{i\theta}$ et 1 : le vecteur allant de $e^{i\theta}$ à 1 a pour affixe $1 - e^{i\theta}$, sa longueur $2 \sin \frac{\theta}{2}$ est le module de $1 - e^{i\theta}$, et son argument est $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$.



Factorisation par l'angle moitié

Pour déterminer le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$ (ou de $1 - e^{i\theta}$) :

1. on factorise par $e^{i\theta/2}$, de façon à faire apparaître $e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ (resp. $e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2} = -2i \sin \frac{\theta}{2}$) ;
2. on étudie le **signe** du facteur réel $\cos \frac{\theta}{2}$ (resp. $\sin \frac{\theta}{2}$) : s'il est strictement positif, c'est le module, et $\frac{\theta}{2}$ (resp. $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$, car $-i = e^{-i\pi/2}$) est un argument ; s'il est strictement négatif, on écrit $-r = r e^{i\pi}$ pour se ramener à un module positif.

La même méthode permet de factoriser $e^{i\theta} \pm e^{i\varphi}$: on factorise par $e^{i(\theta+\varphi)/2}$, ce qui donne

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) e^{i(\theta+\varphi)/2},$$

$$e^{i\theta} - e^{i\varphi} = 2i \sin \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) e^{i(\theta+\varphi)/2}.$$

Attention

L'écriture $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$ n'est la forme exponentielle de $1 + e^{i\theta}$ **que si** $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. Si par exemple $\theta = \frac{3\pi}{2}$, alors $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$: le module est $-2 \cos\frac{\theta}{2}$, et un argument est $\frac{\theta}{2} + \pi$.

Exemple

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Alors $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\frac{\theta}{2} > 0$: $1 + e^{i\theta}$ a pour module $2 \cos\frac{\theta}{2}$ et pour argument $\frac{\theta}{2}$. Par exemple, pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$, on obtient $1 + e^{2i\pi/3} = 2 \cos\frac{\pi}{3} e^{i\pi/3} = e^{i\pi/3}$.

Exemple

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Alors $\sin\frac{\theta}{2} > 0$ et $-i = e^{-i\pi/2}$, donc

$$1 - e^{i\theta} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i(\theta-\pi)/2}.$$

De même, $e^{i\pi/2} + e^{i\pi/6} = 2 \cos\frac{\pi}{6} e^{i\pi/3} = \sqrt{3} e^{i\pi/3}$.

Factorisation de $\cos \theta \pm \cos \varphi$ et de $\sin \theta \pm \sin \varphi$

Pour tous réels θ, φ :

$$\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right),$$

$$\cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right),$$

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right),$$

$$\sin \theta - \sin \varphi = 2 \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right).$$

Démonstration. Posons $\alpha = \frac{\theta + \varphi}{2}$ et $\beta = \frac{\theta - \varphi}{2}$. D'après la factorisation par l'angle moitié de $e^{i\theta} + e^{i\varphi}$:

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \beta e^{i\alpha} = 2 \cos \beta \cos \alpha + i 2 \cos \beta \sin \alpha.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient les formules pour $\cos \theta + \cos \varphi$ et $\sin \theta + \sin \varphi$. De même,

$$e^{i\theta} - e^{i\varphi} = 2i \sin \beta e^{i\alpha} = -2 \sin \beta \sin \alpha + i 2 \sin \beta \cos \alpha,$$

ce qui donne les formules pour $\cos \theta - \cos \varphi$ et $\sin \theta - \sin \varphi$. ■

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) + \cos(x) = 0$. D'après la première formule (avec $\theta = 3x$ et $\varphi = x$) :

$$\cos(3x) + \cos(x) = 2 \cos(2x) \cos(x).$$

L'équation équivaut donc à $\cos(2x) = 0$ ou $\cos(x) = 0$, c'est-à-dire à $x \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{2} \left[\pi \right]$.

5.6 Méthode : sommes de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$

Sommes de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$. Alors

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right),$$

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, ces sommes valent respectivement $n+1$ et 0.

Démonstration. Posons $Z = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$. Par linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire, $\operatorname{Re}(Z) = \sum \cos(k\theta)$ et $\operatorname{Im}(Z) = \sum \sin(k\theta)$. Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, tous les termes valent 1, donc $Z = n+1$. Sinon, $q = e^{i\theta} \neq 1$ et $Z = \sum_{k=0}^n q^k$ est une somme géométrique (partie 3.5) :

$$Z = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

On factorise numérateur et dénominateur par l'angle moitié, en utilisant $1 - e^{i\alpha} = -2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\alpha/2}$:

$$Z = \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) e^{i(n+1)\theta/2}}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{in\theta/2}.$$

Ici $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ car $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$; on conclut en prenant parties réelle et imaginaire. ■

Calcul de $\sum \cos(k\theta)$ et $\sum \sin(k\theta)$

Pour calculer $C = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$:

1. on pose $Z = C + iS = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$;
2. si $e^{i\theta} = 1$, on a directement $Z = n+1$; sinon, on applique la formule de la **somme géométrique** de raison $e^{i\theta} \neq 1$;
3. on factorise numérateur et dénominateur par l'**angle moitié**, puis on simplifie ;
4. on prend la **partie réelle** de Z pour C , et la **partie imaginaire** pour S .

Attention

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, la raison $e^{i\theta}$ vaut 1 et la formule de la somme géométrique ne s'applique pas (elle contiendrait une division par 0) : ce cas se traite à part, et donne $C = n+1$ et $S = 0$.

Exemple

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $n = 5$, on a $\frac{\sin\left(\frac{6\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}$, donc

$$\sum_{k=0}^5 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1, \quad \sum_{k=0}^5 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.$$

On le vérifie directement : $1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 = 1$ et $0 + 1 + 0 - 1 + 0 + 1 = 1$.

6 Racines carrées et équations du second degré à coefficients complexes

6.1 Existence et nombre de racines carrées

Existence et nombre de racines carrées

Tout nombre complexe $a \neq 0$ admet exactement **deux** racines carrées complexes (c'est-à-dire deux nombres complexes z tels que $z^2 = a$), **opposés** l'une de l'autre.

Démonstration. Écrivons a sous forme exponentielle : $a = \rho e^{i\varphi}$, avec $\rho = |a| > 0$ (partie 5.2). Cherchons $z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$) tel que $z^2 = a$. Comme $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, l'égalité $z^2 = a$ équivaut, par unicité de la forme exponentielle, à

$$r^2 = \rho \quad \text{et} \quad 2\theta \equiv \varphi [2\pi].$$

La première équation donne $r = \sqrt{\rho}$ (car $r > 0$), de façon unique. La seconde équivaut à $\theta \equiv \frac{\varphi}{2} [\pi]$, c'est-à-dire, modulo 2π , à

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\varphi}{2} + \pi.$$

Ces deux valeurs de θ sont distinctes modulo 2π : il y a donc exactement deux racines carrées,

$$z_0 = \sqrt{\rho} e^{i\varphi/2}, \quad z_1 = \sqrt{\rho} e^{i(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{\rho} e^{i\varphi/2} = -z_0,$$

qui sont bien opposées l'une de l'autre. ■

Remarque

Contrairement au cas d'un réel positif, il n'existe **aucun moyen de distinguer** l'une de ces deux racines comme étant « la » racine carrée de a (il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, cf. partie 1.3) : c'est pourquoi on parlera plus loin **d'une** racine carrée δ de Δ (et non **de la** racine carrée), pour résoudre une équation du second degré (partie 6.3).

6.2 Racines carrées sous forme algébrique

Méthode

Pour déterminer les racines carrées d'un complexe $Z = X + iY$ (avec $X, Y \in \mathbb{R}$) **sous forme algébrique**, on cherche $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) tel que $z^2 = Z$. En développant $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ et en identifiant avec $Z = X + iY$, ainsi qu'en passant au module

($|z|^2 = |Z|$, soit $x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$), on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ 2xy = Y \end{cases}$$

Les deux premières lignes donnent x^2 et y^2 (donc x et y au signe près) ; la troisième ligne permet de choisir le **bon** signe pour y en fonction de celui de x (ils doivent être de même signe que Y).

Exemple

Déterminons les racines carrées de $Z = 3 + 4i$. On pose $z = x + iy$, avec :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5 \\ 2xy = 4 > 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$, soit $x = \pm 2$ et $y = \pm 1$. Comme $2xy = 4 > 0$, x et y sont de **même signe** : les solutions sont $z = 2 + i$ et $z = -2 - i$ (on vérifie : $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$, correct).

6.3 Résolution générale

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (le **discriminant**, qui est ici un nombre complexe quelconque). Soit δ **une** racine carrée de Δ dans $\mathbb{C}$ (obtenue par la méthode de la partie 6.2 si $\Delta \notin \mathbb{R}_+$). Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement deux solutions (une seule si $\Delta = 0$) :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Démonstration. On écrit, comme dans $\mathbb{R}$, la forme canonique $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$. Comme $\delta^2 = \Delta$, on a $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2$, donc

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] = a \left(z + \frac{b - \delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b + \delta}{2a} \right),$$

qui s'annule si et seulement si $z = \frac{-b + \delta}{2a}$ ou $z = \frac{-b - \delta}{2a}$. ■

Remarque

Cette méthode **généralise** celle du second degré réel (chapitre 0, partie 1) : lorsque a, b, c sont réels et $\Delta \geq 0$, on retrouve les formules usuelles avec $\delta = \sqrt{\Delta}$. Le cas nouveau est celui où a, b, c sont réels mais $\Delta < 0$: on peut alors prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ (racine carrée « évidente » d'un réel négatif), et les deux solutions sont **conjuguées l'une de l'autre** :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \bar{z}_1.$$

Exemple

Réolvons $z^2 - 2z + 5 = 0$ (coefficients réels, $\Delta < 0$). On a $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$, donc $\delta = 4i$ convient, et

$$z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Réolvons maintenant $z^2 - (3+i)z + (2+i) = 0$ (coefficients non réels). On a $\Delta = (3+i)^2 - 4(2+i) = 8+6i-8-4i = 2i$. Une racine carrée de $2i = 2e^{i\pi/2}$ est $\delta = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$ (on vérifie : $(1+i)^2 = 2i$, correct). D'où

$$z = \frac{(3+i) \pm (1+i)}{2}, \quad \text{soit } z = 2+i \text{ ou } z = 1.$$

6.4 Relations coefficients-racines**Somme et produit des racines**

Si z_1, z_2 sont les deux racines (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$), alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration. D'après le théorème de la partie 6.3, $z_1 + z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} + \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$,
et $z_1 z_2 = \frac{(-b - \delta)(-b + \delta)}{4a^2} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. ■

Méthode

Ces relations permettent, **sans calculer le discriminant**, de vérifier un résultat (en recalculant la somme et le produit des racines trouvées), ou de retrouver l'équation dont on connaît les deux racines z_1, z_2 : c'est $z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0$.

7 Racines n -ièmes**7.1 Racines n -ièmes de l'unité****Définition**

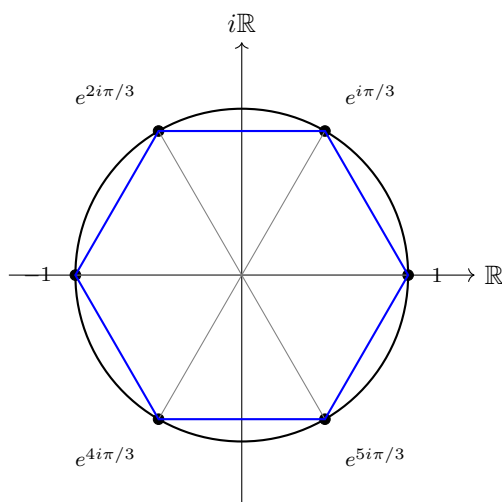
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n -ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces racines.

Théorème

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n} \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

$\mathbb{U}_n$ contient donc exactement n éléments, appelés les n racines n -ièmes de l'unité.

Démonstration. Soit $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$) tel que $z^n = 1$. Alors $z^n = r^n e^{in\theta}$, donc $r^n = |z^n| = |1| = 1$, d'où $r = 1$ (car $r > 0$). De plus $e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$, donc $n\theta \equiv 0 [2\pi]$, c'est-à-dire $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Les valeurs de $e^{i\theta}$ ainsi obtenues se répètent avec une période de n sur k (car θ n'est défini que modulo 2π), d'où exactement n valeurs distinctes, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. ■



Remarque

Les points images des éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un **polygone régulier** à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique et admettant 1 comme l'un de ses sommets (ci-dessus, le cas $n = 6$, un hexagone régulier).

Somme des racines n -ièmes de l'unité

Pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0.$$

Démonstration. Notons $\omega = e^{2i\pi/n} \neq 1$. La somme $S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ est une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$ (partie 3.5) :

$$S = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0,$$

car $\omega^n = e^{2i\pi} = 1$. ■

7.2 Racines n -ièmes d'un nombre complexe quelconque

Théorème

Soit $a = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ (avec $\rho > 0$), et $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de l'équation $z^n = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sont exactement les n nombres complexes

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Remarque

Ces n racines s'obtiennent en multipliant **une** racine n -ième particulière de a (par exemple $\rho^{1/n} e^{i\varphi/n}$) par chacun des n éléments de $\mathbb{U}_n$: géométriquement, ce sont encore les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit cette fois dans le cercle de centre O et de rayon $\rho^{1/n}$.

Exemple

Réolvons $z^3 = 8i$. On a $8i = 8e^{i\pi/2}$, donc les solutions sont $z_k = 8^{1/3}e^{i(\pi/2+2k\pi)/3} = 2e^{i(\pi/6+2k\pi/3)}$ pour $k = 0, 1, 2$, soit $z_0 = 2e^{i\pi/6}$, $z_1 = 2e^{i5\pi/6}$, $z_2 = 2e^{-i\pi/2} = -2i$.

8 Nombres complexes et géométrie plane

8.1 Distance, alignement, orthogonalité

On a déjà vu (partie 3.2) que $AB = |z_B - z_A|$. Les propriétés de l'argument permettent d'aller plus loin, et de traduire l'**alignement** et l'**orthogonalité** en termes de nombres complexes.

Alignement

Soient A, B, C trois points distincts, d'affixes z_A, z_B, z_C . Les points A, B, C sont **alignés** si et seulement si

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Justification. A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vaut 0 ou π modulo 2π — donc 0 modulo π . Or cet angle est (au signe près) l'argument du quotient des affixes de ces deux vecteurs, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ (partie 8.2 ci-dessous) : un nombre complexe non nul est réel si et seulement si son argument vaut 0 modulo π .

Orthogonalité

Avec les mêmes notations, les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires** si et seulement si

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*.$$

Remarque

Le raisonnement est le même que pour l'alignement, avec un angle valant $\frac{\pi}{2}$ modulo π au lieu de 0 modulo π : un nombre complexe non nul est imaginaire pur si et seulement si son argument vaut $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

8.2 Angle orienté de deux vecteurs

Théorème

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls, d'affixes respectives $z_{\vec{u}}, z_{\vec{v}}$. Alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arg \left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \right) [2\pi].$$

Remarque

En particulier, pour trois points distincts A, B, C , l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vaut $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$: c'est ce résultat qui a servi de justification aux deux théorèmes précédents.

Exemple

Soient $A(1)$, $B(1+i)$, $C(2+3i)$ (les affixes sont indiquées entre parenthèses). On a

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(2+3i) - 1}{(1+i) - 1} = \frac{1+3i}{i} = \frac{(1+3i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i+3}{1} = 3-i,$$

qui n'est ni réel ni imaginaire pur : les points A, B, C ne sont donc ni alignés, ni tels que $(AB) \perp (AC)$.

8.3 Transformations usuelles**Translation**

La translation de vecteur $\vec{u}$ (d'affixe b) associe, à tout point M d'affixe z , le point M' d'affixe

$$z' = z + b.$$

Homothétie

L'homothétie de centre Ω (d'affixe ω) et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ associe, à tout point M d'affixe z , le point M' d'affixe z' vérifiant

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

Rotation

La rotation de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ associe, à tout point M d'affixe z , le point M' d'affixe z' vérifiant

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Justification (rotation). On a $\Omega M' = |z' - \omega| = |e^{i\theta}||z - \omega| = |z - \omega| = \Omega M$ (la rotation conserve les distances au centre), et

$$\arg(z' - \omega) = \arg(e^{i\theta}) + \arg(z - \omega) = \theta + \arg(z - \omega) [2\pi],$$

donc l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$ vaut θ : c'est bien la définition géométrique de la rotation de centre Ω et d'angle θ .

Remarque

Une translation, une homothétie et une rotation sont toutes trois des cas particuliers de **similitude directe**, transformation d'écriture complexe $z' = \alpha z + \beta$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$) : on retrouve la translation pour $\alpha = 1$, et l'homothétie ou la rotation (selon que α est réel ou de module 1) en écrivant $\beta = \omega(1 - \alpha)$, où $\omega = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ (si $\alpha \neq 1$) est l'affixe du centre.

Exemple

Déterminons l'image du point $A(2+i)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. D'après le théorème (avec $\omega = 0$) :

$$z' = e^{i\pi/2}(2+i) = i(2+i) = 2i + i^2 = -1 + 2i.$$

On retrouve un fait bien connu : la multiplication par i correspond au quart de tour direct de centre O .

9 Applications à l'analyse**9.1 Exponentielle complexe****Exponentielle complexe**

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on pose

$$e^z := e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Remarque

Cette définition prolonge à la fois l'exponentielle réelle (cas $b = 0$) et la notation $e^{i\theta}$ de la partie 4.1 (cas $a = 0$). Elle dit que e^z est le nombre complexe de module e^a et d'argument b :

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) [2\pi].$$

En particulier, $e^z \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exponentielle d'une somme

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Démonstration. Écrivons $z = a+ib$ et $w = c+id$. Alors, par la règle de calcul de l'exponentielle réelle et la propriété (i) de la partie 4.1 :

$$e^z e^w = e^a e^{ib} e^c e^{id} = e^{a+c} e^{i(b+d)} = e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{z+w}. \quad \blacksquare$$

Remarque

On en déduit, comme pour l'exponentielle réelle, que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}, \quad \frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}, \quad (e^z)^n = e^{nz}.$$

En effet, $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, ce qui donne la première relation, puis les deux autres s'en déduisent.

Égalité de deux exponentielles

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration. En multipliant par $e^{-w} \neq 0$, on a $e^z = e^w \iff e^{z-w} = 1$. Posons $u = z - w = a + ib$. Alors $e^u = e^a(\cos b + i \sin b)$, et deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules et leurs arguments (modulo 2π) sont égaux. Comme $|1| = 1$, on obtient :

$$e^u = 1 \iff e^a = 1 \text{ et } \cos b = 1, \sin b = 0 \iff a = 0 \text{ et } b \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Autrement dit, $e^u = 1 \iff u \in 2i\pi\mathbb{Z}$, ce qui est le résultat annoncé. ■

Attention

Contrairement à l'exponentielle réelle, l'exponentielle complexe n'est **pas injective** : par exemple $e^{2i\pi} = 1 = e^0$. Elle est $2i\pi$ -périodique, c'est-à-dire $e^{z+2i\pi} = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On ne peut donc pas « composer par un logarithme » pour résoudre $e^z = \alpha$: c'est le théorème précédent qu'il faut utiliser.

Exemple

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1 + i\sqrt{3}$. On a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} = e^{\ln 2 + i\pi/3}$, donc l'équation s'écrit $e^z = e^w$ avec $w = \ln 2 + \frac{i\pi}{3}$. D'après le théorème, elle équivaut à $z - w \in 2i\pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$z = \ln 2 + \frac{i\pi}{3} + 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

9.2 Dérivation des fonctions à valeurs complexes

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On l'écrit $f = u + iv$, où $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si u et v le sont, et on pose alors

$$f' = u' + iv'.$$

Remarque

Les règles usuelles de dérivation (somme, produit, quotient) restent valables, avec les mêmes formules, pour les fonctions à valeurs complexes : on les vérifie en revenant aux parties réelle et imaginaire. En particulier, pour toute constante $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Dérivée de $x \mapsto e^{mx}$

Soit $m \in \mathbb{C}$. La fonction $x \mapsto e^{mx}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$(e^{mx})' = m e^{mx}.$$

Démonstration. Écrivons $m = \alpha + i\beta$, et notons $c = \cos(\beta x)$ et $s = \sin(\beta x)$. Alors

$$e^{mx} = e^{\alpha x} c + i e^{\alpha x} s,$$

dont on dérive séparément les parties réelle et imaginaire :

$$(e^{mx})' = (\alpha c - \beta s) e^{\alpha x} + i(\alpha s + \beta c) e^{\alpha x}.$$

Or, en développant,

$$(\alpha + i\beta)(c + is) = (\alpha c - \beta s) + i(\alpha s + \beta c),$$

donc $(e^{mx})' = (\alpha + i\beta) e^{\alpha x} (c + is) = m e^{mx}$. ■

Exemple

Pour $m = i\beta$ (avec $\beta \in \mathbb{R}$), on retrouve $(e^{i\beta x})' = i\beta e^{i\beta x}$: on le vérifie directement en dérivant $\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$.

Primitive de $x \mapsto e^{mx}$

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{mx}$ est $x \mapsto \frac{e^{mx}}{m}$.

Démonstration. D'après le théorème précédent et la linéarité de la dérivation :

$$\left(\frac{e^{mx}}{m}\right)' = \frac{1}{m} m e^{mx} = e^{mx}. \quad \blacksquare$$

9.3 Méthode : primitives de $e^{ax} \cos(bx)$ et $e^{ax} \sin(bx)$

Primitive de $e^{ax} \cos(bx)$ ou de $e^{ax} \sin(bx)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour déterminer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ (resp. de $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$) :

1. on remarque que $e^{(a+ib)x} = e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx))$, donc $e^{ax} \cos(bx) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$ (resp. $e^{ax} \sin(bx) = \operatorname{Im}(e^{(a+ib)x})$) ;
2. une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a + ib}$;
3. on écrit cette primitive sous forme algébrique, en utilisant $\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$, puis on en prend la **partie réelle** (resp. la **partie imaginaire**) : c'est une primitive de la fonction cherchée.

La dernière étape est justifiée par le fait que, si $F' = f$, alors $\operatorname{Re}(F)' = \operatorname{Re}(F') = \operatorname{Re}(f)$, et de même pour la partie imaginaire.

Exemple

Cherchons une primitive de $x \mapsto e^x \cos(2x)$. Ici $a = 1$ et $b = 2$. Une primitive de $e^{(1+2i)x}$ est

$$\frac{e^{(1+2i)x}}{1 + 2i} = \frac{e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) (1 - 2i)}{5},$$

soit
$$\frac{e^x}{5} \left[(\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + i (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) \right].$$

En prenant la partie réelle, on obtient une primitive de $x \mapsto e^x \cos(2x)$:

$$x \mapsto \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)).$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient une primitive de $x \mapsto e^x \sin(2x)$:

$$x \mapsto \frac{e^x}{5} (\sin(2x) - 2 \cos(2x)).$$

Exemple

Calculons $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx$. Ici $a = b = 1$ et $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$, donc

$$\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{e^x}{2} \left[(\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x) \right].$$

Une primitive de $x \mapsto e^x \sin x$ est donc $x \mapsto \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$, d'où

$$\int_0^\pi e^x \sin(x) dx = \left[\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \right]_0^\pi = \frac{e^\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Remarque

En généralisant le calcul précédent, on obtient les deux formules suivantes (pour $(a, b) \neq (0, 0)$) : une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ est

$$x \mapsto \frac{e^{ax} (a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2 + b^2},$$

et une primitive de $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ est

$$x \mapsto \frac{e^{ax} (a \sin(bx) - b \cos(bx))}{a^2 + b^2}.$$

Cette méthode évite les deux intégrations par parties successives que l'on ferait sinon, et dont il faudrait ensuite « retourner » l'égalité. Il est plus sûr de retenir la méthode que ces formules.