

6) Sommes trigonométriques

Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta \neq 0 [2\pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta}$$

$$S_n = 1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \dots + (e^{i\theta})^n \quad \text{où } e^{i\theta} \neq 1 \quad (\theta \neq 0 [2\pi])$$

$$S_n = \frac{(e^{i\theta})^{n+1} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}$$

$$S_n = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} (e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (2i \sin \frac{\theta}{2})}$$

$$S_n = e^{i(\frac{n+1}{2}\theta - \frac{\theta}{2})} \frac{2i \sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{2i \sin(\frac{\theta}{2})}$$

$$S_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n}{2}\theta}$$

$$S_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + i \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Comme $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$,

On peut identifier la partie réelle et imaginaire :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin(n\theta)$$

VI Complexes et équations du second degré

1) Racines carrées

Définition : Si $\eta \in \mathbb{C}$, on appelle une racine carrée de η un nombre $w \in \mathbb{C}$ t.q. $w^2 = \eta$

Ex : -1 a pour racine carrée tout complexe w t.q. :

$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib) \end{array}$$

$$w^2 = -1 \Leftrightarrow w^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (w+i)(w-i) = 0$$

$$\Leftrightarrow w+i=0 \quad \text{ou} \quad w-i=0$$

$$\Leftrightarrow w = -i \quad \text{ou} \quad w = i$$

Propriété : Si $\eta \in \mathbb{C}^*$, on a $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. :

(module) (un argument)

$$\eta = r e^{i\theta}$$

Ce nombre a deux racines carrées qui sont opposées

et qui sont $w_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $w_2 = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

Preuve On cherche $w = \rho e^{i\varphi}$ où $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$w^2 = \eta$$

$$\Leftrightarrow (\rho e^{i\varphi})^2 = r e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\varphi} = r e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\varphi \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

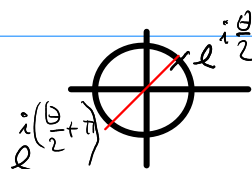
Puisque $\rho > 0$, on a $\rho^2 = r \Leftrightarrow \rho = \sqrt{r}$

L'équation $2\varphi \equiv \theta [2\pi]$ signifie : on a $k \in \mathbb{Z}$ t.q. :

$$2\varphi = \theta + k \times 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi$$

Ainsi $2\varphi \equiv \theta [2\pi] \Leftrightarrow \varphi \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$



Sur le cercle, on a donc :

$$e^{i\varphi} = e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad e^{i\varphi} = e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\pi}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \times (-1)$$

$$= -e^{i\frac{\theta}{2}}$$

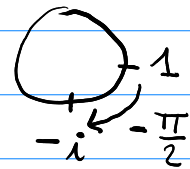
d'où : $w = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $w = \sqrt{r} \times (-e^{i\frac{\theta}{2}})$

$$w = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Exemple : Racines carrées de $-8i$?
 " " $-18 + 18i\sqrt{3}$?

$$-8i = 8(-i)$$

$$= 8 e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



Les deux racines carrées de ce nombre sont :

$$w_1 = \sqrt{8} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad w_2 = -\sqrt{8} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$w_1 = \sqrt{4 \times 2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{et} \quad w_2 = \sqrt{4 \times 2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$w_1 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{et} \quad w_2 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

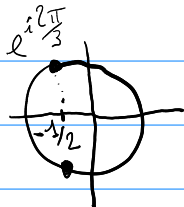
$$w_1 = 2 - 2i \quad \text{et} \quad w_2 = -2 + 2i$$

w_1 et w_2 sont les deux racines carrées de $-8i$.

$-18 + 18\sqrt{3}i$: $-18 + 18\sqrt{3}i = 18(-1 + i\sqrt{3})$

$$= 18 \times 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 36 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



Les 2 racines carrées de ce nombre sont :

$$w_1 = 6 e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad w_2 = -6 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$w_1 = 6 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{et} \quad w_2 = -6 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$w_1 = 3 + i3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad w_2 = -3 - i3\sqrt{3}$$

2) Racines d'un complexe sous forme algébrique

Si $\eta = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

on cherche $w = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq :

$$w^2 = \eta \quad (E)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + i(2xy) = a + ib$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (*) \end{cases}$$

Si w est une racine de η , on a aussi explicité des modules dans (E) :

$$|w|^2 = |\eta|$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ donne } 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$(2) - (1) \quad 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \Leftrightarrow y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}$$

$$\text{Ainsi, } x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \text{ et } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}}$$

(*) indique : $\rightarrow$ si $b \geq 0$, x et y sont de même signe
 $\rightarrow$ si $b < 0$, x et y sont de signes opposés

Exemples :

($\because$) $\eta = -3 - 4i$, quelles sont ses racines ?

On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tq :

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i \quad (E)$$

$$x^2 - y^2 + i(2xy) = -3 - 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy = -4 \end{cases} \rightarrow x \text{ et } y \text{ sont de signes opposés}$$

module

$$\rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (2)$$

$$(1)+(2) : 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ donc } x = \pm 1$$

$$(2)-(1) : 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \text{ donc } y = \pm 2$$

$$w_1 = 1 - 2i \quad \text{et} \quad w_2 = -1 + 2i$$

sont les deux racines carrées de z

(ii) $-5 - 12i$: quelles sont ses racines carrées.

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 &= x^2 + (iy)^2 + 2x \times iy \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy) \end{aligned}$$

On cherche $w = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (1) \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

$\rightarrow x$ et y de signes opposés

$$\text{Module : } x^2 + y^2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \quad (2)$$

$$(1) + (2) : 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$(2) - (1) : 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$$

$2 - 3i$ et $-2 + 3i$ sont les deux racines carrées de $-5 - 12i$

(iii) Trouver les racines carrées de $1 + i$

$\rightarrow$ sous forme exponentielle

$\rightarrow$ sous forme algébrique

puis en déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

(pendant la pause à venir)

3) Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

$$\text{Si } T(z) = az^2 + bz + c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

$$\text{On a : } T(z) = a \left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right]$$

$$\text{On } \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

$$\text{d'où } \gamma^2 + \frac{b}{a} \gamma = \left(\gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

$$T(\gamma) = a \left[\left(\gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[\left(\gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[\left(\gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ . On a alors :

$$T(\gamma) = a \left[\left(\gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[\left(\gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[\left(\gamma + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\delta}{2a} \right] \left[\left(\gamma + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\delta}{2a} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left(\gamma - \frac{-b+\delta}{2a} \right) \left(\gamma - \frac{-b-\delta}{2a} \right)$$

En notant $\gamma_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $\gamma_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$, on a :

$$T(\gamma) = a (\gamma - \gamma_1) (\gamma - \gamma_2)$$

L'équation $T(\gamma) = 0$ a donc deux solutions si $\Delta \neq 0$, qui sont γ_1 et γ_2 .

$$\text{Si } \Delta = 0, \quad T(\gamma) = a \left(\gamma - \frac{-b}{2a} \right)^2$$

et l'unique solution de $T(\gamma) = 0$ est

$$\gamma_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ on dit qu'elle est une racine double du trinôme.}$$

Cos réel : Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $\Delta \in \mathbb{R}$.

• Le cas $\Delta \geq 0$ est identique à ce que l'on a déjà vu.

• Si $\Delta < 0$, l'équation $T(z) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais Δ a une racine carrée : $\delta = i\sqrt{-\Delta}$

T a deux racines conjuguées de la forme : $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exercice pendant la pause :

$$z^2 - (4+6i)z - 5+10i = 0$$

$$\Delta = (4+6i)^2 - 4(-5+10i)$$

