

### 6) Sommes trigonométriques

Si  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\theta \neq 0 [2\pi]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons :

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta}$$

$$S_n = 1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \dots + (e^{i\theta})^n \quad \text{où } e^{i\theta} \neq 1 \quad (\theta \neq 0 [2\pi])$$

$$S_n = \frac{(e^{i\theta})^{n+1} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}$$

$$S_n = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} (e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (2i \sin \frac{\theta}{2})}$$

$$S_n = e^{i(\frac{n+1}{2}\theta - \frac{\theta}{2})} \frac{2i \sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{2i \sin(\frac{\theta}{2})}$$

$$S_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n}{2}\theta}$$

$$S_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + i \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Comme  $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$  ,

On peut identifier la partie réelle et imaginaire :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin(n\theta)$$

## VI Complexes et équations du second degré

### 1) Racines carrées

Définition : Si  $\eta \in \mathbb{C}$ , on appelle une racine carrée de  $\eta$  un nombre  $w \in \mathbb{C}$  tq  $w^2 = \eta$

Ex :  $-1$  a pour racine carrée tout complexe  $w$  tq :

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib) \\ w^2 = -1 \Leftrightarrow w^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (w+i)(w-i) = 0 \\ \Leftrightarrow w+i=0 \text{ ou } w-i=0 \\ \Leftrightarrow w=-i \text{ ou } w=i \end{array} \right\}$$

Propriété : Si  $\eta \in \mathbb{C}^*$ , on a  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tq :

(module) (un argument)

$$\eta = r e^{i\theta}$$

Ce nombre a deux racines carrées qui sont opposées et qui sont  $w_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$  et  $w_2 = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

Preuve On cherche  $w = \rho e^{i\varphi}$  où  $\rho > 0$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$  tq :

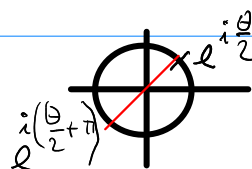
$$\begin{aligned} w^2 &= \eta \\ \Leftrightarrow (\rho e^{i\varphi})^2 &= r e^{i\theta} \\ \Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\varphi} &= r e^{i\theta} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\varphi \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque  $\rho > 0$ , on a  $\rho^2 = r \Leftrightarrow \rho = \sqrt{r}$

L'équation  $2\varphi \equiv \theta [2\pi]$  signifie : on a  $k \in \mathbb{Z}$  tq :

$$\begin{aligned} 2\varphi &= \theta + k \times 2\pi \\ \Leftrightarrow \varphi &= \frac{\theta}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Ainsi  $2\varphi \equiv \theta [2\pi] \Leftrightarrow \varphi \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$



Sur le cercle, on a donc :

$$e^{i\varphi} = e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad e^{i\varphi} = e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\pi}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \times (-1)$$

$$= -e^{i\frac{\theta}{2}}$$

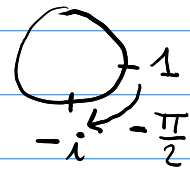
d'où :  $w = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$  ou  $w = \sqrt{r} \times (-e^{i\frac{\theta}{2}})$

$$w = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Exemple : Racines carrées de  $-8i$  ?  
 " "  $-18 + 18i\sqrt{3}$  ?

$$-8i = 8(-i)$$

$$= 8 e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



Les deux racines carrées de ce nombre sont :

$$w_1 = \sqrt{8} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad w_2 = -\sqrt{8} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$w_1 = \sqrt{4 \times 2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{et} \quad w_2 = \sqrt{4 \times 2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$w_1 = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{et} \quad w_2 = 2\sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

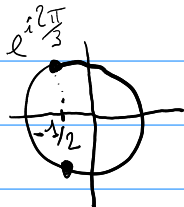
$$w_1 = 2 - 2i \quad \text{et} \quad w_2 = -2 + 2i$$

$w_1$  et  $w_2$  sont les deux racines carrées de  $-8i$ .

$-18 + 18\sqrt{3}i$  :  $-18 + 18\sqrt{3}i = 18(-1 + i\sqrt{3})$

$$= 18 \times 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 36 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



Les 2 racines carrées de ce nombre sont :

$$w_1 = 6 e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad w_2 = -6 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$w_1 = 6 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{et} \quad w_2 = -6 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$w_1 = 3 + i3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad w_2 = -3 - i3\sqrt{3}$$

## 2) Racines d'un complexe sous forme algébrique

Si  $\eta = a + ib$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

on cherche  $w = x + iy$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tq :

$$w^2 = \eta \quad (E)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + i(2xy) = a + ib$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (*) \end{cases}$$

Si  $w$  est une racine de  $\eta$ , on a aussi explicité des modules dans (E) :

$$|w|^2 = |\eta|$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ donne } 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$(2) - (1) \quad 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \Leftrightarrow y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}$$

$$\text{Ainsi, } x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \text{ et } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}}$$

(\*) indique :  $\rightarrow$  si  $b \geq 0$ ,  $x$  et  $y$  sont de même signe  
 $\rightarrow$  si  $b < 0$ ,  $x$  et  $y$  sont de signes opposés

Exemples :

( $\because$ )  $\eta = -3 - 4i$ , quelles sont ses racines ?

On cherche  $x, y \in \mathbb{R}$  tq :

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i \quad (E)$$

$$x^2 - y^2 + i(2xy) = -3 - 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy = -4 \end{cases} \rightarrow x \text{ et } y \text{ sont de signes opposés}$$

module

$$\rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (2)$$

$$(1)+(2) : 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ donc } x = \pm 1$$

$$(2)-(1) : 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \text{ donc } y = \pm 2$$

$$w_1 = 1 - 2i \quad \text{et} \quad w_2 = -1 + 2i$$

sont les deux racines carrées de  $z$

(ii)  $-5 - 12i$  : quelles sont ses racines carrées.

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 &= x^2 + (iy)^2 + 2x \times iy \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy) \end{aligned}$$

On cherche  $w = x + iy$  où  $x, y \in \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (1) \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

$\rightarrow x$  et  $y$  de signes opposés

$$\text{Module : } x^2 + y^2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \quad (2)$$

$$(1) + (2) : 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$(2) - (1) : 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$$

$2 - 3i$  et  $-2 + 3i$  sont les deux racines carrées de  $-5 - 12i$

(iii) Trouver les racines carrées de  $1 + i$

$\rightarrow$  sous forme exponentielle

$\rightarrow$  sous forme algébrique

puis en déduire  $\cos(\frac{\pi}{8})$  et  $\sin(\frac{\pi}{8})$

(pendant la pause à venir)

3) Equation du second degré dans  $\mathbb{C}$

$$\text{Si } T(z) = az^2 + bz + c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

$$\text{On a : } T(z) = a \left[ z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} \right]$$

$$\text{On } \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = z^2 + \frac{b}{a} z + \left( \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$\text{d'où } \gamma^2 + \frac{b}{a} \gamma = \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$T(\gamma) = a \left[ \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[ \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[ \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

On note  $\Delta = b^2 - 4ac$  et  $\delta \in \mathbb{C}$  une racine carrée de  $\Delta$ . On a alors :

$$T(\gamma) = a \left[ \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[ \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\delta}{2a} \right)^2 \right]$$

$$T(\gamma) = a \left[ \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\delta}{2a} \right] \left[ \left( \gamma + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\delta}{2a} \right]$$

$$T(\gamma) = a \left( \gamma - \frac{-b+\delta}{2a} \right) \left( \gamma - \frac{-b-\delta}{2a} \right)$$

En notant  $\gamma_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$  et  $\gamma_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ , on a :

$$T(\gamma) = a (\gamma - \gamma_1) (\gamma - \gamma_2)$$

L'équation  $T(\gamma) = 0$  a donc deux solutions si  $\Delta \neq 0$ , qui sont  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

$$\text{Si } \Delta = 0, \quad T(\gamma) = a \left( \gamma - \frac{-b}{2a} \right)^2$$

et l'unique solution de  $T(\gamma) = 0$  est

$$\gamma_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ on dit qu'elle est une racine double du trinôme.}$$

Cos réel : Si  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , alors  $\Delta \in \mathbb{R}$ .

• Le cas  $\Delta \geq 0$  est identique à ce que l'on a déjà vu.

• Si  $\Delta < 0$ , l'équation  $T(z) = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$  mais  $\Delta$  a une racine carrée :  $\delta = i\sqrt{-\Delta}$

$T$  a deux racines conjuguées de la forme : 
$$\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercice pendant la pause :

$$z^2 - (4+6i)z - 5+10i = 0$$

$$\Delta = (4+6i)^2 - 4(-5+10i)$$

$$\Delta = 16 - 36 + 48i + 20 - 40i$$

$$\Delta = 8i$$

$\delta = 2+2i$  est une racine carrée de  $\Delta$

$$z_1 = \frac{4+6i - (2+2i)}{2} \quad z_2 = \frac{4+6i + 2+2i}{2}$$

$$z_1 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \quad z_2 = 3+4i$$

$$z^2 - (4+6i)z - 5+10i = (z-1-2i)(z-3-4i)$$

Exo qui était proposé :

Racines de  $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$

$\rightarrow \sqrt{\sqrt{2}} e^{i\pi/8}$

$\rightarrow -\sqrt{\sqrt{2}} e^{i\pi/8}$

On cherche leur forme algébrique :

on résout  $(x+iy)^2 = 1+i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2xy = 1 & (*) \end{cases}$$

Si  $x+iy$  est une racine de  $1+i$ , on a :

$$\begin{aligned} |x+iy|^2 &= |1+i| \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{2} & (2) \end{aligned}$$

$$(1) + (2) : 2x^2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$$

$$(2) - (1) : 2y^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$$

(\*) implique que  $x$  et  $y$  sont de même signe

Les 2 racines de  $1+i$  sont :

$$w = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \text{ et } -w$$

On déduit des formes exponentielles de ces racines que :

$$\sqrt{\sqrt{2}} e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$$

$$e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 2}{4}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

On identifie les parties  $\begin{cases} \nearrow \text{réelles} \\ \searrow \text{imaginaires} \end{cases}$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

#### 4) Relations coefficients / racines

Si  $T(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c$

a pour racines  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , on a :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = -\frac{b}{a} \\ \gamma_1 \gamma_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Preuve :  $\rightarrow$  à faire avec

$$\gamma_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \gamma_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

$$\text{sachant } \delta^2 = b^2 - 4ac$$

### VII Racines n-ièmes

#### 1) Racines n-ièmes de l'unité

Définition : Si  $n \geq 2$  est un entier, on appelle racine n-ième de l'unité tout complexe  $\gamma$  t.q. :  $\gamma^n = 1$ .

On note  $\mathbb{U}_n = \{ \gamma \in \mathbb{C} \mid \gamma^n = 1 \}$

l'ensemble de ces racines  $n$ -ièmes de l'unité.

Remarque: Si  $\eta \in \mathbb{U}_n$ , on a :

$$\eta^n = 1$$

$$\text{d'où } |\eta^n| = |1|$$

$$|\eta|^n = 1$$

Puisque  $|\eta| \in \mathbb{R}_+$ , on en déduit :

$$|\eta| = 1$$

par stricte croissance de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$

d'où  $\eta \in \mathbb{U}$ ,  $\eta$  est unimodulaire.

Ainsi, on a  $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ .

Exemples : déterminer  $\mathbb{U}_2$  et  $\mathbb{U}_4$

$\mathbb{U}_2$  est l'ensemble des  $\eta \in \mathbb{C}$  tq :

$$\eta^2 = 1 \Leftrightarrow \eta^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\eta - 1)(\eta + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta = 1 \text{ ou } \eta = -1$$

$$\mathbb{U}_2 = \{1, -1\} = \{e^{i0}, e^{i\pi}\}$$

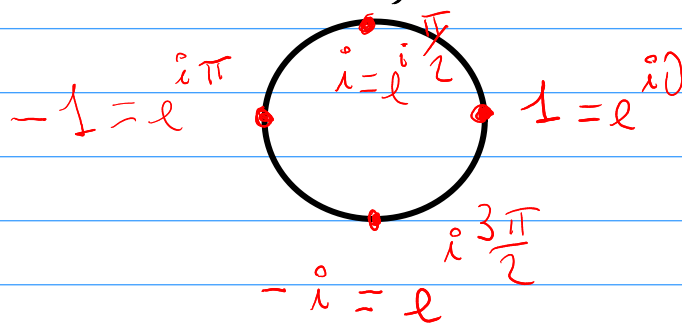
$$\underline{\mathbb{U}_4} : \quad \eta^4 = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \eta^4 - 1 = 0$$

$$(\Rightarrow) (\eta^2 - 1)(\eta^2 + 1) = 0$$

$$(\Rightarrow) (\eta - 1)(\eta + 1)(\eta - i)(\eta + i) = 0$$

$$\mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$$

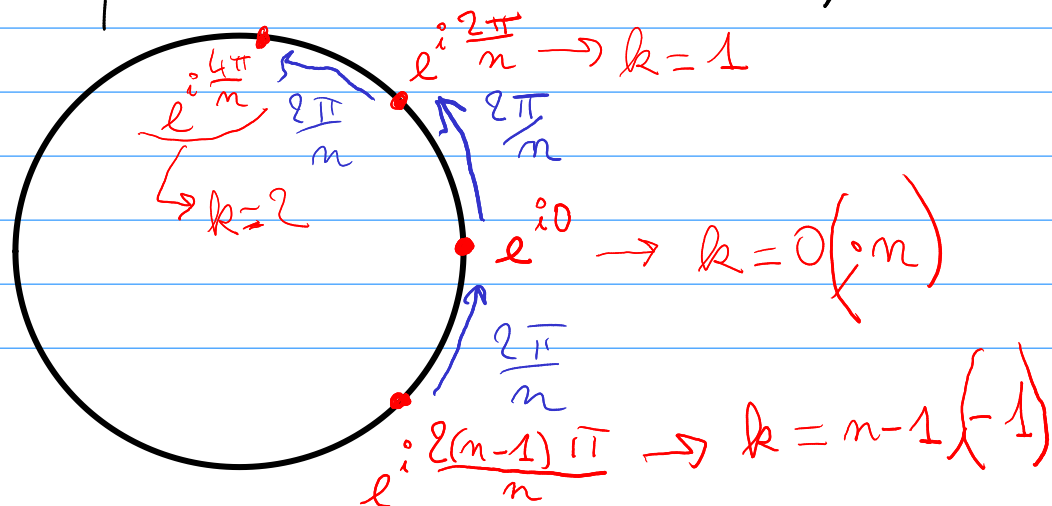
$$\mathbb{U}_4 = \left\{ e^{i0}; e^{i\frac{\pi}{2}}; e^{i\pi}; e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\}$$



Propriété: Si  $n \geq 2$ , on a:

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

(Rappel:  $\llbracket a, b \rrbracket = \mathbb{Z} \cap [a, b]$ )  
désigne l'ensemble des entiers compris entre  $a$  et  $b$



Les racines  $n$ -ièmes de l'unité sont (les affixes de) les  $n$  sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, et l'une d'entre elles est 1.

Preuve: On a vu qu'une racine  $n$ -ième de l'unité est de module 1 donc s'écrit  $\eta = e^{i\theta}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$\text{On veut } (e^{i\theta})^n = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{in\theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{in\theta} = e^{i0}$$

$$\Leftrightarrow n\theta \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = 0 + k \times 2\pi$$

↓  
"Il existe"

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

Si on fait varier  $k$  entre 0 et  $n-1$ ,

on va décrire toutes les racines  $n$ -ièmes de 1.

(à expliquer avec le dessin)

□

# Somme des racines n-ièmes de l'unité

Notons  $S_n$  cette somme :

$$S_n = e^{i0} + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i2 \times \frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}$$

$$S_n = 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1}$$

$$S_n = \frac{1 - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1}$$

$$S_n = 0$$

Ainsi, la somme des racines n-ièmes est nulle.

Caractérisation des racines n-ièmes  
autre que 1 :

Si  $\eta \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\eta^n - 1 = (\eta - 1)(\eta^{n-1} + \eta^{n-2} + \dots + \eta + 1)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Ainsi, si  $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , on a :

$$\eta \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \eta^n - 1 = 0$$

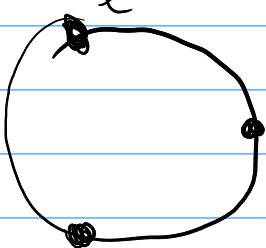
$$\Leftrightarrow (\eta - 1)(\eta^{n-1} + \dots + \eta + 1) = 0$$

$$(=) \eta^{n-1} + \eta^{n-2} + \dots + \eta + 1 = 0$$

---

Application: forme algébrique des racines  
pour  $n=3$  et  $n=5$

$n=3$


$$\left. \begin{array}{l} \eta \in \mathbb{U}_3 \setminus \{1\} \\ \Leftrightarrow \eta^2 + \eta + 1 = 0 \end{array} \right|$$

$$\text{On a } \Delta = -3$$

$\delta = i\sqrt{3}$  est une  
racine carrée de  $\Delta$

Les 2 solutions de cette équation sont :

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

On a donc :

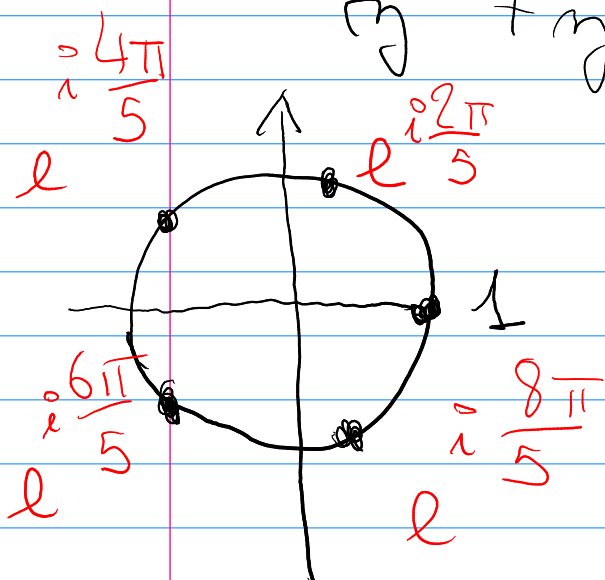
$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad (\text{Partie imaginaire positive})$$

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad (\text{Partie imaginaire négative})$$

$$n=5$$

$\eta \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$  on a :

$$\eta^4 + \eta^3 + \eta^2 + \eta + 1 = 0$$



$\eta = 0$  n'est pas solution.

Pour  $\eta \neq 0$ , on résout :

$$\eta^4 + \eta^3 + \eta^2 + \eta + 1 = 0$$

$$\eta^2 + \eta + 1 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} = 0$$

On pose  $Z = \eta + \frac{1}{\eta}$  à finir

## Exercice

On note  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4$$

$$T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Montrer que  $S + T = -1$

$$S \times T = 2,$$

et en déduire la forme algébrique de  $S$  et  $T$ .