
Programme des colles du 02/11 au 06/11

1. Règles de calcul avec les puissances. Si les expressions ont un sens, on a pour x, y, a et b réels :

(a) $x^a \times x^b = x^{a+b}$

(d) $x^a \times y^a = (xy)^a$

(b) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

(e) $\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

(c) $(x^a)^b = x^{ab}$

2. Fonctions associées

- **Pour $a, b \in \mathbb{R}$, savoir comment déduire du graphe $\mathcal{C}_f$ de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ceux $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ de $g : x \mapsto f(x - a)$ et $h : x \mapsto f(x) + b$**
- Fonctions paires, impaires
- Fonctions de courbe présentant un axe vertical ou un centre de symétrie
- Fonctions périodiques

3. Complexes

- Définition, addition et multiplication.
- Conjugaison et propriétés, interprétation géométrique.
- Module d'un complexe, interprétation en termes de distance.
- **Inégalité triangulaire : savoir prouver que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|z + w| \leq |z| + |w|$.
Le cas d'égalité est aussi à connaître, mais pas sa preuve**
- Triangle de Pascal pour le développement de $(a + b)^n$
- Factorisation de $z^n - w^n$ par $z - w$:

$$z^n - w^n = (z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}) = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}.$$

- Sommes géométriques, si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- Factorisation par $(z - \alpha)$ d'une expression polynomiale en z qui s'annule pour $z = \alpha$.
- Applications à la trigonométrie
 - **Formules d'Euler, linéarisation.**
 - Formule de Moivre.
 - Représentation trigonométrique et argument d'un complexe non nul.
 - Argument d'un produit, d'un quotient.
 - Transformation d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ du type $f : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ en $f : x \mapsto A \cos(x + \phi)$
 - Factorisations : angle moitié pour $1 \pm e^{i\theta}$, angle moyen pour $e^{ip} \pm e^{iq}$ et formules pour $\cos p \pm \cos q$, $\sin p \pm \sin q$.
 - **Sommes trigonométriques à savoir calculer pour $x \neq 0[2\pi]$:**

$$C_n = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx),$$

$$S_n = \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx).$$

- Racines carrées d'un complexe non nul : sous forme polaire, sous forme algébrique.
- Equation du second degré dans $\mathbb{C}$, somme et produit des racines et cas des coefficients réels.
- Racines n -ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

- Caractérisation des racines n -ièmes de l'unité autres que 1 par $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$