Intégrales et équations différentielles.

Primitives

Exercice 1. *Primitives usuelles*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle à préciser :

(a) $x^2 - 3x + \dfrac{1}{x^2}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^{3/2}$, (c) $e^{-3x} + \cos(2x)$, (d) $\dfrac{1}{1+4x^2}$, (e) $\dfrac{1}{3x+1}$.

Exercice 2. *Reconnaître une forme $u'u^\alpha$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$…*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle à préciser :

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, (b) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$, (c) $\sin x \cos^3 x$, (d) $\tan x$, (e) $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, (f) $\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

Exercice 3. *Inverse d'un trinôme du second degré*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle à préciser :

(a) $\dfrac{1}{x^2-4}$, (b) $\dfrac{1}{x^2-2x+1}$, (c) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$, (d) $\dfrac{1}{2x^2+2x+5}$, (e) $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+5}$.

Intégrales : calculs et propriétés

Exercice 4. *Calculs directs*

Calculer :

$$\text{(a) } \int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(b) } \int_0^{\ln 2} e^{2x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{(c) } \int_0^{\pi/4} \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x,$$

$$\text{(d) } \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{(e) } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}.$$

Exercice 5. *Encadrements*

a) Montrer que $\dfrac{1}{e} \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 1$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de (I_n).

Exercice 6. *Intégrales dépendant de leurs bornes*

a) Pour $x > 1$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$, calculer $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $G'(x)$. Montrer que G est strictement croissante, puis que G est impaire (on pourra dériver $x \mapsto G(x) + G(-x)$).

Exercice 7. *Parité et périodicité*

Calculer, sans chercher de primitive compliquée :

$$\text{(a) } \int_{-2}^{2} \left(x^3 + x^2 + 1\right)\mathrm{d}x, \quad \text{(b) } \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^3 \cos x + \sin^2 x\right)\mathrm{d}x, \quad \text{(c) } \int_3^{3+2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Intégration par parties

Exercice 8. *Intégrations par parties simples*

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$\text{(a)} \int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(d)} \int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9. *Intégrations par parties successives*

Calculer :

$$\text{(a)} \int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_1^e (\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10. *Primitives par intégration par parties*

a) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de $\arcsin$ sur $]-1,1[$.

b) De même, déterminer une primitive de $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. *Une suite d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) En déduire I_2 et I_3.

Changement de variable

Exercice 12. *Changements de variable proposés*

Calculer à l'aide du changement de variable indiqué :

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$ avec $t = \sqrt{x}$;

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ avec $t = e^x$;

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ avec $t = \cos x$.

Exercice 13. *Changements de variable à trouver*

Calculer, en choisissant un changement de variable adapté :

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}, \qquad \text{(b)} \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}, \qquad \text{(c)} \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Fonctions à valeurs complexes et linéarisation

Exercice 14. *Intégrales et primitives avec l'exponentielle complexe*

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'exponentielle complexe.

b) Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{-x}\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. *Linéarisation et intégrales*

À l'aide des formules d'Euler, linéariser puis calculer :

$$\text{(a)}\ \int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)}\ \int_0^{\pi}\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 16. *Équations homogènes*

Résoudre sur l'intervalle indiqué :

$$\text{(a) } y'+3y=0 \text{ sur } \mathbb{R}, \qquad \text{(b) } y'+\frac{2x}{1+x^2}\,y=0 \text{ sur } \mathbb{R}, \qquad \text{(c) } y'+\frac{1}{x}\,y=0 \text{ sur }]0,+\infty[,$$

$$\text{(d) } y'+(\tan x)\,y=0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \text{(e) } y'+xy=0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 17. *Seconds membres usuels*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

(a) $y'-2y=e^{3x}$, (b) $y'+y=e^{-x}$, (c) $y'+2y=x^2+1$, (d) $y'-y=\sin x$, (e) $y'-y=e^x+x$.

Exercice 18. *Variation de la constante*

Résoudre, par la méthode de variation de la constante, sur l'intervalle indiqué :

a) $xy'+2y=x^2$ sur $]0,+\infty[$;

b) $(1+x^2)y'+2xy=1$ sur $\mathbb{R}$;

c) $y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. *Problèmes de Cauchy*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

a) $y'+y=xe^{-x}$, avec $y(0)=1$;

b) $y'-3y=2e^{3x}$, avec $y(0)=1$.

Exercice 20. *Loi de refroidissement*

La température $T(t)$ (en degrés Celsius) d'un objet plongé dans une pièce de température constante 20 vérifie, pour $t \geqslant 0$ (en minutes), l'équation $T'(t) = -k\big(T(t)-20\big)$, où $k>0$ est une constante. À l'instant $t=0$, l'objet est à 90 degrés, et après 10 minutes il est à 60 degrés.

a) Déterminer $T(t)$ pour tout $t \geqslant 0$ et la valeur de k.

b) Au bout de combien de temps l'objet atteint-il 30 degrés ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à la minute près.

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 21. *Équations homogènes*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ (solutions réelles) :

$$\text{(a) } y'' - 5y' + 6y = 0, \quad \text{(b) } y'' + 4y' + 4y = 0, \quad \text{(c) } y'' - 2y' + 5y = 0,$$
$$\text{(d) } y'' + 9y = 0, \quad \text{(e) } 4y'' - y = 0, \quad \text{(f) } y'' + y' + y = 0.$$

Exercice 22. *Problèmes de Cauchy homogènes*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$;

b) $y'' + 4y = 0$, avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$;

c) $y'' - 6y' + 9y = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 23. *Équations avec second membre*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\text{(a) } y'' - y = 2x, \quad \text{(b) } y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad \text{(c) } y'' + 4y = \cos x,$$
$$\text{(d) } y'' + y = \sin x, \quad \text{(e) } y'' - 3y' + 2y = e^{x} + e^{3x}.$$

Exercice 24. *Problèmes de Cauchy complets*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

a) $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$;

b) $y'' + y = \cos x$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 25. *Une équation fonctionnelle*

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$.

a) Montrer que si f convient, alors f est deux fois dérivable et $f'' = -f$.

b) En déduire toutes les fonctions f solutions.

Exercice 26. *Équations intégrales*

Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a) } f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(b) } f(x) = x + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Indication : dériver, puis utiliser la valeur en 0.)

Exercice 27. *Intégrales de Wallis*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer W_0 et W_1.

b) Montrer, par une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

c) En déduire W_4 et W_5.

Corrigés

Primitives

Exercice 1. (a) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$. (b) $2\sqrt{x} + \dfrac{2}{5}x^{5/2}$ sur $]0,+\infty[$. (c) $-\dfrac{e^{-3x}}{3} + \dfrac{\sin(2x)}{2}$ sur $\mathbb{R}$. (d) $\dfrac{1}{2}\arctan(2x)$ sur $\mathbb{R}$ (la dérivée de $\arctan(2x)$ est $\frac{2}{1+4x^2}$). (e) $\dfrac{1}{3}\ln(3x+1)$ sur $]-\frac{1}{3},+\infty[$.

Exercice 2. (a) Avec $u = 1+x^2$, $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}u'u^{-1/2}$, de primitive $\sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. (b) $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{u'}{u}$ avec $u = 1+e^x > 0$, de primitive $\ln(1+e^x)$ sur $\mathbb{R}$. (c) $\sin x \cos^3 x = -u'u^3$ avec $u = \cos x$, de primitive $-\dfrac{\cos^4 x}{4}$ sur $\mathbb{R}$. (d) $\tan x = -\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \cos x$, de primitive $-\ln(\cos x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. (e) Avec $u = \ln x$, $\dfrac{1}{x(\ln x)^2} = u'u^{-2}$, de primitive $-\dfrac{1}{\ln x}$ sur $]1,+\infty[$. (f) Avec $u = \sin x$, $\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x} = \dfrac{u'}{1+u^2}$, de primitive $\arctan(\sin x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (a) $\Delta = 16 > 0$, racines ± 2, et $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right)$. Sur $]2,+\infty[$, une primitive est $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-2}{x+2}$ (sur $]-2,2[$ ou $]-\infty,-2[$, on utilise $\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$). (b) $x^2-2x+1 = (x-1)^2$, de primitive $-\dfrac{1}{x-1}$ sur $]1,+\infty[$ (ou sur $]-\infty,1[$). (c) $\Delta = -3 < 0$ et $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, donc $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$: une primitive sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$. (d) $\Delta = -36 < 0$ et $2x^2+2x+5 = 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)$, donc $a = 2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$: une primitive sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\arctan\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{1}{3}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)$. (e) On écrit $2x+3 = (2x+2)+1$, donc $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+5} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5} + \dfrac{1}{(x+1)^2+4}$, de primitive $\ln\left(x^2+2x+5\right) + \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Intégrales : calculs et propriétés

Exercice 4. (a) $\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$. (b) $\left[\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2} = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2}$. (c) $\left[\tan x\right]_0^{\pi/4} = 1$. (d) $\left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \dfrac{\ln 2}{2}$. (e) D'après l'exercice 3(c),

$$\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Exercice 5. a) Pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, donc $e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1$. Par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, $\dfrac{1}{e} \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 1$. b) Pour $x \in [0,1]$, $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, puis (comme $x^n \geqslant 0$) $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$. Par croissance, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$, et $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$, d'où l'encadrement. Comme $\frac{1}{2(n+1)}$ et $\frac{1}{n+1}$ tendent vers 0, le théorème des gendarmes donne $\lim I_n = 0$.

Exercice 6. a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1,+\infty[$ et x, x^2 sont dans $]1,+\infty[$ pour $x > 1$: F est dérivable et

$$F'(x) = 2x \times \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Pour $x > 1$, $x-1 > 0$ et $\ln x > 0$, donc $F'(x) > 0$: F est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. b) Par le théorème fondamental, G est dérivable et $G'(x) = e^{-x^2} > 0$, donc G est strictement croissante. Soit

$H(x) = G(x) + G(-x)$. Alors $H'(x) = G'(x) - G'(-x) = e^{-x^2} - e^{-x^2} = 0$, donc H est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $H(0) = 0$. Ainsi $G(-x) = -G(x)$: G est impaire.

Exercice 7. (a) $t \mapsto t^3$ est impaire et $t \mapsto t^2 + 1$ est paire, donc l'intégrale vaut

$$2\int_0^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{8}{3}+2\right) = \frac{28}{3}.$$

(b) $x \mapsto x^3 \cos x$ est impaire, donc son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle ; il reste

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

(c) $\cos^2$ est 2π-périodique, donc l'intégrale est égale à

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

Intégration par parties

Exercice 8. (a) Avec $u = x$, $v' = e^{-x}$: $\big[-xe^{-x}\big]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-1} + \big(1-e^{-1}\big) = 1 - \frac{2}{e}$. (b) Avec $u = \ln x$, $v' = x$: $\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$. (c) Avec $u = x$, $v' = \sin x$: $\big[-x\cos x\big]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \pi + 0 = \pi$. (d) Avec $u = \arctan x$, $v' = 1$: $\big[x\arctan x\big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 9. (a) Avec $u = x^2$, $v' = e^x$: $\big[x^2e^x\big]_0^1 - 2\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = e - 2\times 1 = e-2$ (on utilise $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$, calculé dans le cours). (b) Avec $u = (\ln x)^2$, $v' = 1$: $\big[x(\ln x)^2\big]_1^e - 2\displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = e - 2\Big[x\ln x - x\Big]_1^e = e - 2\times 1 = e-2$.

Exercice 10. a) Pour $x \in\,]-1,1[$, avec $u = \arcsin$ et $v' = 1$: $\displaystyle\int_0^x \arcsin t\,\mathrm{d}t = x\arcsin x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1$. Donc $x \mapsto x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de $\arcsin$ (vérification en dérivant : $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$). b) Avec $u = \ln(1+t^2)$ et $v' = 1$: $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$. Une primitive est donc $x \mapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$.

Exercice 11. a) $I_0 = \displaystyle\int_1^e 1\,\mathrm{d}x = e-1$ et $I_1 = \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = \big[x\ln x - x\big]_1^e = 1$. b) Avec $u = (\ln x)^{n+1}$ et $v' = 1$: $I_{n+1} = \big[x(\ln x)^{n+1}\big]_1^e - (n+1)\displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = e - (n+1)I_n$, car $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$. c) $I_2 = e - 2I_1 = e-2$ et $I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = 6 - 2e$.

Changement de variable

Exercice 12. a) Avec $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, $t \in [1,2]$, $\sqrt{x} = t$: l'intégrale vaut $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int_1^2 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\ln\frac{3}{2}$. b) Avec $t = e^x$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$, les bornes 0 et $\ln 3$ deviennent 1 et 3 : $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan 3 - \frac{\pi}{4}$. c) On écrit $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$; avec $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, les bornes 0 et $\frac{\pi}{2}$ deviennent 1 et 0 : $\displaystyle\int_1^0 (1-t^2)(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

Exercice 13. (a) $t=\sqrt{x}$ ($x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$, $t\in[0,1]$) : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2-2\ln 2$. (b) $t=\ln x$ ($\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}$, bornes 0 et 1) : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$. (c) $t=x^2$ ($\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$, bornes 0 et 1) : $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$.

Fonctions à valeurs complexes et linéarisation

Exercice 14. a) $\displaystyle\int_0^\pi e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_0^\pi e^{(2+i)x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\,\frac{e^{(2+i)\pi}-1}{2+i}$. Comme $e^{(2+i)\pi}=e^{2\pi}e^{i\pi}=-e^{2\pi}$, on obtient $\displaystyle\frac{-e^{2\pi}-1}{2+i}=-\frac{(e^{2\pi}+1)(2-i)}{5}$, de partie réelle $\displaystyle-\frac{2\big(e^{2\pi}+1\big)}{5}$. b) $e^{-x}\sin(3x)=\mathrm{Im}\big(e^{(-1+3i)x}\big)$ a pour primitive la partie imaginaire de $\displaystyle\frac{e^{(-1+3i)x}}{-1+3i}=\frac{e^{-x}(\cos 3x+i\sin 3x)(-1-3i)}{10}$, soit $\displaystyle\frac{e^{-x}}{10}\big(-\sin 3x-3\cos 3x\big)$. Une primitive est donc $\displaystyle x\mapsto-\frac{e^{-x}}{10}\big(\sin(3x)+3\cos(3x)\big)$.

Exercice 15. (a)

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}=\frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}.$$

Donc

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{8}\right]_0^{\pi/2}=\frac{3\pi}{16}.$$

(b) On a $\sin x\cos x=\dfrac{\sin(2x)}{2}$, donc $\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{\sin^2(2x)}{4}=\dfrac{1-\cos(4x)}{8}$ et

$$\int_0^\pi \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{8}.$$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 16. (a) λe^{-3x}. (b) $A(x)=\ln(1+x^2)$: $\dfrac{\lambda}{1+x^2}$. (c) $A(x)=\ln x$: $\dfrac{\lambda}{x}$. (d) $A(x)=-\ln(\cos x)$: $\lambda\cos x$. (e) $A(x)=\dfrac{x^2}{2}$: $\lambda e^{-x^2/2}$. Dans chaque cas, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 17. (a) $m=3\neq 2$: $y_p=\dfrac{e^{3x}}{3-2}=e^{3x}$, solutions $e^{3x}+\lambda e^{2x}$. (b) $a=1$ et $m=-1=-a$ (résonance) : $y_p=xe^{-x}$, solutions $(x+\lambda)e^{-x}$. (c) On cherche $y_p=\alpha x^2+\beta x+\gamma$; $y_p'+2y_p=2\alpha x^2+(2\alpha+2\beta)x+(\beta+2\gamma)$, donc $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{3}{4}$. Solutions $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}+\lambda e^{-2x}$. (d) On résout $z'-z=e^{ix}$: $z_p=\dfrac{e^{ix}}{i-1}=\dfrac{(-1-i)e^{ix}}{2}$, de partie imaginaire $\displaystyle-\frac{\sin x+\cos x}{2}$. Solutions $\displaystyle-\frac{\sin x+\cos x}{2}+\lambda e^x$. (e) Par superposition : pour e^x, résonance ($a=-1$, $m=1=-a$), $y_1=xe^x$; pour x, $y_2=-x-1$. Solutions $xe^x-x-1+\lambda e^x$.

Exercice 18. (a) On normalise : $\displaystyle y'+\frac{2}{x}y=x$. $A(x)=2\ln x$, $e^{A(x)}=x^2$, on cherche $\displaystyle y=\frac{\lambda(x)}{x^2}$ avec $\lambda'(x)=x\cdot x^2=x^3$, donc $\displaystyle\lambda(x)=\frac{x^4}{4}+\lambda_0$ et $\displaystyle y=\frac{x^2}{4}+\frac{\lambda_0}{x^2}$. (b) On normalise : $\displaystyle y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}$. $A(x)=\ln(1+x^2)$, $e^{A(x)}=1+x^2$, $\lambda'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}(1+x^2)=1$, donc $\lambda=x+\lambda_0$ et $\displaystyle y=\frac{x+\lambda_0}{1+x^2}$. (c) $A(x)=x$, $\lambda'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, donc $\lambda(x)=\ln(1+e^x)+\lambda_0$ et $y=e^{-x}\big(\ln(1+e^x)+\lambda_0\big)$.

Exercice 19. (a) La variation de la constante donne $y = \lambda(x)e^{-x}$ avec $\lambda'(x) = xe^{-x}e^{x} = x$, donc $y = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda_0\right)e^{-x}$. Comme $y(0) = \lambda_0 = 1$, on obtient $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x}$. (b) Ici $a = -3$ et $m = 3 = -a$ (résonance), $y_p = 2xe^{3x}$, solutions $(2x + \lambda)e^{3x}$. Comme $y(0) = \lambda = 1$, on obtient $y(x) = (2x + 1)e^{3x}$.
Exercice 20. a) L'équation s'écrit $T' + kT = 20k$. Les solutions homogènes sont λe^{-kt} et la constante 20 est solution particulière, donc $T(t) = 20 + \lambda e^{-kt}$. Comme $T(0) = 90$, $\lambda = 70$: $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$. Comme $T(10) = 60$, on a $70e^{-10k} = 40$, donc $e^{-10k} = \frac{4}{7}$ et $k = \frac{\ln(7/4)}{10} \approx 0{,}056$. b) $T(t) = 30$ si et seulement si $70e^{-kt} = 10$, donc $e^{-kt} = \frac{1}{7}$, soit $t = \frac{\ln 7}{k} = \frac{10 \ln 7}{\ln(7/4)} \approx 34{,}8$ minutes, soit environ 35 minutes.

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 21. (a) Racines 2 et 3 : $\lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$. (b) Racine double -2 : $(\lambda + \mu x)e^{-2x}$. (c) $\Delta = 4 - 20 = -16$, racines $1 \pm 2i$: $e^{x}\big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)$. (d) Racines $\pm 3i$: $\lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)$. (e) $4r^2 - 1 = 0$, racines $\pm\frac{1}{2}$: $\lambda e^{x/2} + \mu e^{-x/2}$. (f) $\Delta = -3$, racines $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$: $e^{-x/2}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. Dans tous les cas, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Exercice 22. (a) $r^2 + 2r - 3 = (r - 1)(r + 3)$, donc $y = \lambda e^{x} + \mu e^{-3x}$ et $y' = \lambda e^{x} - 3\mu e^{-3x}$. Les conditions initiales donnent $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda - 3\mu = -1$, donc $\mu = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$: $y = \frac{e^{x} + e^{-3x}}{2}$. (b) $y = \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x$, $y' = -2\lambda\sin 2x + 2\mu\cos 2x$. Donc $\lambda = 2$ et $2\mu = 2$: $y = 2\cos(2x) + \sin(2x)$. (c) Racine double 3 : $y = (\lambda + \mu x)e^{3x}$, $y' = (3\lambda + \mu + 3\mu x)e^{3x}$. Donc $\lambda = 0$ et $\mu = 1$: $y = xe^{3x}$.
Exercice 23. (a) Racines de l'équation caractéristique ± 1 ; $y_p = \alpha x + \beta$ avec $-\alpha x - \beta = 2x$, donc $y_p = -2x$; solutions $-2x + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$. (b) Racine double 2 et $m = 2$: $y_p = \frac{x^2}{2}e^{2x}$ (formule $\frac{A}{2a}x^2e^{mx}$) ; solutions $\left(\frac{x^2}{2} + \lambda + \mu x\right)e^{2x}$. (c) $P(i) = 4 - 1 = 3 \neq 0$: $y_p = \mathrm{Re}\frac{e^{ix}}{3} = \frac{\cos x}{3}$; solutions $\frac{\cos x}{3} + \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$. (d) Résonance : $m = i$ est racine simple de $r^2 + 1$, $P'(i) = 2i$, $z_p = \frac{xe^{ix}}{2i} = \frac{x(\sin x - i\cos x)}{2}$, de partie imaginaire $-\frac{x\cos x}{2}$; solutions $-\frac{x\cos x}{2} + \lambda\cos x + \mu\sin x$. (e) Les racines de $r^2 - 3r + 2$ sont 1 et 2. Pour e^{x} ($m = 1$ racine simple, $P'(1) = -1$) : $y_1 = -xe^{x}$; pour e^{3x} ($P(3) = 2$) : $y_2 = \frac{e^{3x}}{2}$. Par superposition, solutions $-xe^{x} + \frac{e^{3x}}{2} + \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.
Exercice 24. (a) L'équation caractéristique a pour racines $-1 \pm i$, et $m = -1$ n'est pas racine, avec $P(-1) = 1 - 2 + 2 = 1$: $y_p = 2e^{-x}$. Solutions $y = e^{-x}\big(\lambda\cos x + \mu\sin x\big) + 2e^{-x}$. Comme $y(0) = \lambda + 2 = 0$, $\lambda = -2$. Ensuite $y'(x) = e^{-x}\big((\mu - \lambda)\cos x - (\lambda + \mu)\sin x\big) - 2e^{-x}$, donc $y'(0) = \mu - \lambda - 2 = 1$, soit $\mu = 1$. Donc $y(x) = e^{-x}\big(2 - 2\cos x + \sin x\big)$. (b) Résonance : $y_p = \frac{x\sin x}{2}$ (cours), solutions $\frac{x\sin x}{2} + \lambda\cos x + \mu\sin x$. Comme $y(0) = \lambda = 0$ et $y'(0) = \mu = 0$, la solution est $y(x) = \frac{x\sin x}{2}$.

Pour aller plus loin

Exercice 25. a) Si f vérifie $f'(x) = f(-x)$ pour tout x, alors f' est la composée de f et de $x \mapsto -x$, deux fonctions dérivables. Donc f' est dérivable et $f''(x) = -f'(-x)$. Or $f'(-x) = f\big(-(-x)\big) = f(x)$, donc $f''(x) = -f(x)$. b) Les solutions de $f'' + f = 0$ sont $f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$. Alors $f'(x) = -\lambda\sin x + \mu\cos x$ et $f(-x) = \lambda\cos x - \mu\sin x$. L'égalité $f'(x) = f(-x)$ pour tout x impose (en $x = 0$) $\mu = \lambda$. Réciproquement, pour $\mu = \lambda$, $f'(x) = \lambda(\cos x - \sin x) = f(-x)$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda(\cos x + \sin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Exercice 26. (a) f étant continue, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable, donc f aussi, et $f'(x) = f(x)$, avec $f(0) = 1 + 0 = 1$. Donc $f(x) = \lambda e^{x}$ avec $\lambda = 1$: $f(x) = e^{x}$. Réciproquement, $1 + \int_0^x e^{t}\,\mathrm{d}t = 1 + e^{x} - 1 = e^{x}$ convient. (b) De même, f est dérivable et $f'(x) = 1 + f(x)$, avec $f(0) = 0$. Les solutions sont $-1 + \lambda e^{x}$

(solution particulière -1), et $f(0) = 0$ donne $\lambda = 1$: $f(x) = e^x - 1$. Réciproquement, $x + \int_0^x (e^t - 1)\,\mathrm{d}t = x + e^x - 1 - x = e^x - 1$ convient.

Exercice 27. a) $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 1$. b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\sin^{n+2} t = \sin^{n+1} t \times \sin t$ et on intègre par parties avec $u = \sin^{n+1} t$ et $v' = \sin t$, $v = -\cos t$: $W_{n+2} = \big[-\sin^{n+1} t \cos t\big]_0^{\pi/2} + (n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t\,\mathrm{d}t$. Le crochet est nul. Avec $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, on obtient $W_{n+2} = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big)$, donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, d'où le résultat. c) $W_2 = \dfrac{1}{2}W_0 = \dfrac{\pi}{4}$ puis $W_4 = \dfrac{3}{4}W_2 = \dfrac{3\pi}{16}$; $W_3 = \dfrac{2}{3}W_1 = \dfrac{2}{3}$ puis $W_5 = \dfrac{4}{5}W_3 = \dfrac{8}{15}$.