$h(x) = e^x \cos(2x) \quad \to e^{i2x} = \cos(2x) + i\sin(2x)$

$e^x e^{i2x} = e^x\cos(2x) + i\, e^x \sin(2x)$

$h(x) = Re\left(e^x e^{i2x} \right)$

$= Re\left(e^{x+2ix} \right)$

$= Re\left(e^{(1+2i)x} \right)$

$H(x) = Re\left(\frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i} \right)$

$H(x) = Re\left(e^x (\cos 2x + i \sin 2x) \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} \right)$

$H(x) = e^x \, Re\left(\frac{1}{5}(\cos 2x + i \sin 2x)(1-2i) \right)$ $\quad \to 1^2 + 2^2 = 5$

$H(x) = e^x \left(\frac{\cos(2x)}{5} + \frac{2\sin(2x)}{5} \right)$

$g(x) = e^{-3x}\cos(4x)$

$G(x) = \frac{e^{-3x}}{25}\left(-3\cos(4x) + 4\sin(4x) \right)$

Chapitre : Intégrales et équations différentielles.

I est un intervalle, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I] Primitives

1) Définition

Si $f : I \to \mathbb{K}$, alors on dit que $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f si F est dérivable et que $F' = f$ (i.e. : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$)

Propriétés Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue. Alors on a :

(i) f admet une primitive

(ii) Si F est une primitive de f, toute primitive G de f vérifie :

On a $C \in \mathbb{K}$ t.q. $G = F + C$, c.à.d. :

$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$

(iii) Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, on a une unique primitive F de f t.q. $F(x_0) = y_0$

2) Primitives usuelles

fonction de x	Primitive	Intervalle
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]k\pi - \frac{\pi}{2} ; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1;1[$

3) Composées et primitives

Si $g : J \to \mathbb{K}$ est dérivable et que $u : I \to J$ aussi, $g \circ u : I \to \mathbb{K}$ est dérivable et si $x \in I$:

$$(g \circ u)'(x) = u'(x)\, g'(u(x))$$

On en déduit les primitives :

Fonction de x	Primitive	Condition
$u'(x)\, u^n(x)$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$	Aucune

$u'(x)\,u^{\alpha}(x)$ $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$	$u>0$ i.e. : $\forall x \in I,\ 0<u(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$u>0$ ou $u<0$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	/
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	/
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\operatorname{Arctan}(u(x))$	/

Exercice Donner des primitives de :

1) $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

2) $x \mapsto \cos x \sin^3 x$

3) $x \mapsto x e^{-x^2}$

4) $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

5) $x \mapsto \tan x$

$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$

1) $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

2) $x \mapsto \frac{1}{4}\sin^4 x$

3) $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

⚠ $g(x) = x \operatorname{Arctan} x$

$g'(x) = \operatorname{Arctan} x + \frac{x}{1+x^2}$

$H(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$H'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \operatorname{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right)$

$H'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$H'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$

---

4) $\frac{1}{x \ln x} = \frac{1/x \to u'(x)}{\ln(x) \to u(x)}$

Primitive : $x \mapsto \ln(\lvert \ln x \rvert)$ sur $]0;1[$ ou sur $]1;+\infty[$

---

5) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$ $\left(\text{sur }]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\right)$

$x \mapsto -\ln(|\cos x|)$ est une primitive de tan sur $]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$

---

4) Inverse d'un trinôme

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on cherche une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

On distingue 3 cas selon $\Delta = b^2 - 4ac$

1er cas : $\Delta > 0$, on a 2 racines x_1 et x_2 et l'on peut trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ est :

$$x \mapsto \alpha \ln|x-x_1| + \beta \ln|x-x_2|$$

Ex : donner une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} \qquad \Delta = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

$$\frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{\alpha(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{\beta(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{\alpha x - 3\alpha + \beta x - 2\beta}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)x - 3\alpha - 2\beta}{x^2-5x+6}$$

On veut $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq le numérateur soit 1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ -3\alpha + 2\alpha = 1 \end{cases}$$

$\alpha = -1$ et $\beta = 1$ convient et l'on a :

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

$x \mapsto -\ln|x-2| + \ln|x-3|$

en est une primitive.

2ème cas : $\Delta = 0$, on a une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2}$$

Primitive : $x \mapsto -\frac{1}{a(x-x_0)}$

Exemple : primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x^2+12x+18}$

$$T(x) = 2(x^2+6x+9)$$

$$\Delta = 6^2 - 4\times 9 = 0$$

$x_0 = -3$ est racine double

$$T(x) = 2(x+3)^2$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2(x+3)^2}$ est :

$$x \mapsto -\frac{1}{2(x+3)}$$

3ème cas : $\Delta < 0$,

Dans ce cas, le trinôme se met sous la forme :

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \mathcal{P}\right)$$

où $\mathcal{P} = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \mathcal{P}}$$

$$= \frac{1}{a\mathcal{P}} \times \frac{1}{\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}{\mathcal{P}} + 1}$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\Delta}} \times \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}}\right)^2 + 1}$$

Si on pose $G(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}}$$

$$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}} \times \frac{1}{u^2(x)+1}$$

Primitive de $\frac{1}{ax^2+bx+c}$: $x \mapsto \frac{1}{a\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)$

Exemple : $x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$$

$$\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1}$$

Primitive : $x \mapsto \text{Arctan}(x+2)$

Pour 15h30 $x \mapsto \frac{1}{2x^2+4x+4}$ Primitive ?

$$2x^2+4x+4 = 2(x^2+2x+2) \quad \left| \quad (x+1)^2 = x^2+2x+1 \right.$$
$$= 2((x+1)^2+1)$$

$$\frac{1}{2x^2+4x+4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

Primitive : $x \mapsto \frac{1}{2}\text{Arctan}(x+1)$

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+6x+11}$: en donner une primitive

x^2+6x ?

$(x+3)^2 = x^2+6x+9$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$x^2+6x+11 = (x+3)^2+2$

Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$: $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$

$x \mapsto \dfrac{1}{1+(x+7)^2}$: $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+7)$

$x \mapsto \dfrac{1}{1+(2x)^2}$: $x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(2x)$

$f(x) = \operatorname{Arctan}(2x)$ $\quad f'(x) = 2\dfrac{1}{1+(2x)^2}$

$$\frac{1}{x^2+6x+11} = \frac{1}{2+(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{(x+3)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$\times 1/\sqrt{2}$

$g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$g'(x) = u'(x) \times \frac{1}{1+u^2(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{2}}\right)$

II Intégrales

1) Définition

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue sur l'intervalle I.

On note $F : I \to \mathbb{K}$ une primitive de f.

Si $a, b \in I$, on note alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cohérence de cette définition : Si G est une autre primitive de f, on a $C \in \mathbb{K}$ t.q. $G = F + C$

donc $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C)$

$= F(b) + C - F(a) - C$

$= F(b) - F(a)$

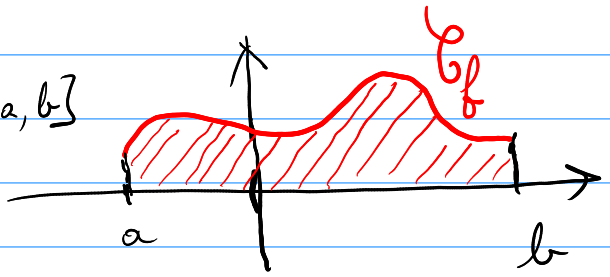
Rques : (i) x est ici une muette (qui ne dit rien)

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ L'intégrale est la même

On peut écrire ici tout simplement : $\int_a^b f$

(ii) $\int_b^a f = -\int_a^b f$ et $\int_a^a f = 0$

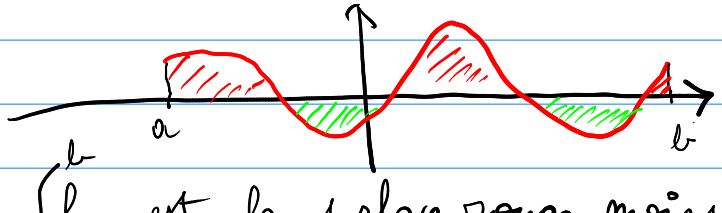
(iii) Si $a < b$ et $f \geq 0$ sur $[a,b]$



$\forall x \in [a,b]$, $0 \leq f(x)$

$\int_a^b f$ est la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$

Si f n'est pas de signe constant, on soustrait la surface des portions situées en dessous de $y = 0$ à celle des portions qui sont au dessus.



$\int_a^b f$ est la surface rouge moins la verte.

Exemples :

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2}$$

primitive : $t \mapsto \dfrac{t^{1/2}}{1/2}$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[2t^{1/2}\right]_{t=1}^{t=4} = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right] \quad ? \quad 0$$

$g(x) = \dfrac{\sin^3 x}{3}$ $\qquad g'(x) = \cos x \times \sin^2(x)$

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos(2x) + 2\right)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

Primitive : $x \mapsto \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{2}x$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 = \left[\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = \left(0 + \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\times 0\right) = \pi/4$$

Remarque : $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$, où $g : I \to \mathbb{K}$ est continue, $a \in I$

est l'unique primitive de g qui s'annule quand $x = a$

2) Propriétés

(i) Linéarité de l'intégrale :

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$, $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et $a, b \in I$,

alors : $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$

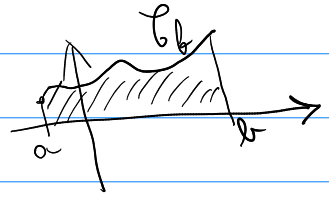
(ii) Loi de Chasles

Si $a, b, c \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$ continue, alors :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

(iii) Positivité Si $a < b$ et f continue, $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f \geq 0$ sur $[a,b]$,

(c.à.d. : $\forall x \in [a,b]$, $0 \leq f(x)$)



alors on a :

$$0 \leq \int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_a^b f = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$$

(iv) Croissance : $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues

Si $a < b$ et que l'on a : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$,

alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

et $\int_a^b f = \int_a^b g \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = g(x)$

(v) Inégalité triangulaire $f : I \to \mathbb{K}$ continue, $a, b \in I$

On a : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

3) Intégrale à bornes variables

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue, que $u, v : J \to I$ où J est un autre intervalle, et que l'on définit :

$$\varphi : J \to \mathbb{K}$$

$$\varphi : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \ ,$$

alors si u, v sont dérivables en $x \in J$, φ est dérivable en x et :

$$\varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$$

Preuve : On note F une primitive de f.

$$\varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

φ est dérivable car c'est une soustraction de deux compositions de fonctions qui sont dérivables.

$$\varphi'(x) = v'(x) F'(v(x)) - u'(x) F'(u(x))$$
$$= v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)) \quad \square$$

III Techniques de calcul d'intégrales

1) Intégration par parties

Si $u, v : I \to \mathbb{K}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, c.à.d. dérivables avec leurs dérivées u' et v' qui sont des fonctions continues, alors on a pour $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Preuve : uv est une primitive de $u'v + uv'$

donc $$\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$$

$$\int_a^b u'v + \int_a^b uv' = [uv]_a^b \quad \square$$

$I = \int_0^1 (x+1) e^{2x}\,dx$?

$v(x) = x+1 \qquad u'(x) = e^{2x}$

$v'(x) = 1 \qquad u(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$I = \left[(x+1) \times \frac{1}{2} e^{2x}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x}\,dx$$

$$I = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$I = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$I = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$I = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

→ Pour lundi : exercice 8

Autre exemple important :

$$\int_1^x \underbrace{\ln(t)}\,dt = \left[t\ln t\right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{1}{t}\times t\,dt$$

$u'(t)\,v(t)$

$v(t) = \ln t \qquad u'(t) = 1$

$v'(t) = \frac{1}{t} \qquad u(t) = t$

$$\int_1^x \ln(t)\,dt = x\ln x - 1\ln 1 - \left[t\right]_{t=1}^{t=x}$$

$$= x\ln x - x + 1$$

On pourra retenir qu'une primitive de $\ln$ est :

$$x \mapsto x\ln x - x$$

Bonus pour lundi

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx$

(Boxe : exercice 8 de la dernière feuille)

En écrivant $\cos^{n+2}(x) = \underbrace{\cos(x)}\,\underbrace{\cos^{n+1}(x)}$

$u'(x) \qquad v(x)$

pour faire une I.P.P. dans le calcul de $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos x\,\cos^{n+1} x\,dx$,

trouver un lien entre I_{n+2} et I_n.