Programme des colles du 09/11 au 13/11

1. Fonctions associées
   - Pour $a, b \in \mathbb{R}$, savoir comment déduire du graphe $\mathcal{C}_f$ de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ceux $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ de $g : x \mapsto f(x-a)$ et $h : x \mapsto f(x) + b$
   - Fonctions paires, impaires
   - Fonctions de courbe présentant un axe vertical ou un centre de symétrie
   - Fonctions périodiques
2. Complexes
   - Définition, addition et multiplication.
   - Conjugaison et propriétés, interprétation géométrique.
   - Module d'un complexe, interprétation en termes de distance.
   - Inégalité triangulaire : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$, et cas d'égalité.
   - Triangle de Pascal pour le développement de $(a+b)^n$
   - Factorisation de $z^n - w^n$ par $z - w$:

$$z^n - w^n = (z-w)\big(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}\big) = (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}.$$

   - Sommes géométriques , si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

   - Factorisation par $(z-\alpha)$ d'une expression polynomiale en z qui s'annule pour $z = \alpha$.
   - Applications à la trigonométrie
     - **Formules d'Euler, linéarisation.**
     - Formule de Moivre.
     - Représentation trigonométrique et argument d'un complexe non nul.
     - Argument d'un produit, d'un quotient.
     - Transformation d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du type $f : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ en $f : x \mapsto A\cos(x+\phi)$
     - Factorisations : angle moitié pour $1 \pm e^{i\theta}$, angle moyen pour $e^{ip} \pm e^{iq}$ et formules pour $\cos p \pm \cos q$, $\sin p \pm \sin q$.
     - **Sommes trigonométriques à savoir calculer pour $x \neq 0[2\pi]$:**

$$C_n = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx),$$

$$S_n = \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx).$$

   - Racines carrées d'un complexe non nul : sous forme polaire, sous forme algébrique.
   - Equation du second degré dans $\mathbb{C}$, somme et produit des racines et cas des coefficients réels.
   - Racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

   - Caractérisation des racines n-ièmes de l'unité autres que 1 par $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$
   - Angles, alignement et orthogonalité en utilisant les affixes complexes.
   - Transformations géométriques du plan complexe : translations, homothéties et rotations.
   - Fonction exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, propriété relativement à l'image d'une somme.
   - **Propriété concernant l'égalité d'exponentielles :**

$$\forall z, w \in \mathbb{C},\ e^z = e^w \Leftrightarrow z - w \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$