Intégrales et équations différentielles

PCSI

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I désigne un **intervalle** de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point). Ce chapitre rassemble les **techniques fondamentales de calcul** en analyse : primitives, calcul d'intégrales (intégration par parties, changement de variable), puis résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre et du second ordre à coefficients constants.

1 Primitives

1.1 Définition et ensemble des primitives

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{K}$ **dérivable** sur I telle que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

On a admis dans le chapitre sur les fonctions usuelles (partie 4) le résultat suivant, qui sert de fondement à tout ce chapitre.

Primitives d'une fonction continue (admis)

Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle I.

(i) f admet des primitives sur I ;

(ii) si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $F + C$, où $C \in \mathbb{K}$ est une constante ;

(iii) pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une **unique** primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Justification de (ii) et (iii). Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $G - F$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I, donc elle est constante. Pour (iii), la primitive $F + C$ vaut y_0 en x_0 si et seulement si $C = y_0 - F(x_0)$.

Attention

L'hypothèse « **sur un intervalle** » est essentielle. Par exemple, $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$ comme sur $]0, +\infty[$, mais la fonction définie par $\ln|x| + 1$ sur $]-\infty, 0[$ et par $\ln|x|$ sur $]0, +\infty[$ est aussi une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$: **deux primitives sur $\mathbb{R}^*$ ne diffèrent pas forcément d'une constante**, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

1.2 Primitives usuelles

Les formules de dérivation du cours donnent, *par lecture inverse*, le tableau suivant. Dans chaque cas, C désigne une constante quelconque.

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Remarque

Pour $\alpha = -1$, on retrouve $x \mapsto \frac{1}{x}$, de primitive $\ln|x|$: c'est le seul cas exceptionnel de la formule des puissances. Pour vérifier que $\ln|x|$ convient sur $]-\infty, 0[$, on écrit $\ln|x| = \ln(-x)$ et on dérive : $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

1.3 Primitives de fonctions composées

La dérivée d'une composée, $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$, donne par lecture inverse les formes suivantes, où u est une fonction **dérivable** sur I (et u' est supposée continue).

Primitives de fonctions composées

Fonction	Une primitive	Condition
$u'\, u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$ (et $u > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$)
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u ne s'annule pas sur I
$u'\, e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$	

Méthode

Pour déterminer une primitive d'une expression qui n'est pas dans le tableau usuel :

1. on cherche si l'expression contient une fonction u **et sa dérivée** u' (à une constante multiplicative près) ;
2. on ajuste les constantes pour faire apparaître exactement u' ;

3. on **vérifie** le résultat en dérivant.

Exemple

- $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$: avec $u(x) = 1+x^2$, $u'(x) = 2x$, on a $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, de primitive $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \cos x \sin^3 x$: avec $u = \sin$, $u' = \cos$, la forme $u'u^3$ a pour primitive $\dfrac{\sin^4 x}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto x\,e^{-x^2}$: avec $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$, on a $x\,e^{-x^2} = -\dfrac{1}{2}u'e^u$, de primitive $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]1,+\infty[$: avec $u = \ln$, $u' = \frac{1}{x}$, la fonction est $\dfrac{u'}{u}$, de primitive $\ln|\ln x| = \ln(\ln x)$.
- $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: avec $u = \cos$, $u' = -\sin$, on a $\tan = -\dfrac{u'}{u}$, de primitive $-\ln|\cos x|$.

1.4 Primitives de l'inverse d'un trinôme du second degré

Soit a, b, c trois **réels** avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. On cherche une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur un intervalle où le trinôme **ne s'annule pas**. Il n'y a pas de formule à retenir : la **méthode** dépend du signe de Δ.

Primitive de $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

- $\Delta > 0$: le trinôme a deux racines réelles $r_1 \neq r_2$ et $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$. On **cherche deux réels A et B** tels que
$$\frac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2}.$$
Chaque terme a pour primitive $A\ln|x-r_1|$ et $B\ln|x-r_2|$.
- $\Delta = 0$: le trinôme s'écrit $a(x-r)^2$, et $\dfrac{1}{a(x-r)^2}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{a(x-r)}$.
- $\Delta < 0$: on met le trinôme sous forme canonique $a\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)$ avec $\beta > 0$, puis on **factorise** β^2 pour se ramener à
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = C \times \frac{1}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} \qquad \text{avec } C = \frac{1}{a\beta^2}.$$
On reconnaît $\dfrac{u'}{1+u^2}$ à une constante près, avec $u = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$ et $u' = \dfrac{1}{\beta}$, donc une primitive est $C\beta\arctan\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)$.

Dans tous les cas, on **vérifie** le résultat en dérivant.

Détail du cas $\Delta > 0$. En mettant au même dénominateur, on veut $A(x-r_2)+B(x-r_1)=1$ pour tout x. En prenant $x=r_1$, on obtient $A(r_1-r_2)=1$; en prenant $x=r_2$, on obtient $B(r_2-r_1)=1$. Donc $A=\dfrac{1}{r_1-r_2}=-B$, et en pratique on trouve A et B en évaluant en chacune des racines.

Exemple

- $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ sur $]2,+\infty[$: $\Delta=1>0$, racines 1 et 2, donc $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. On cherche A, B avec $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$, c'est-à-dire $A(x-2)+B(x-1)=1$. Pour $x=1$: $-A=1$; pour $x=2$: $B=1$. Donc $\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$, de primitive $\ln\dfrac{x-2}{x-1}$ (car $\frac{x-2}{x-1}>0$ sur $]2,+\infty[$).
- $\dfrac{1}{4x^2-4x+1}=\dfrac{1}{(2x-1)^2}=\dfrac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$ sur $]\frac{1}{2},+\infty[$: $\Delta=0$. Une primitive est $-\dfrac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{1}{2(2x-1)}$.
- $\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ sur $\mathbb{R}$: $\Delta=-16<0$ et $x^2+2x+5=(x+1)^2+4=4\left(1+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2\right)$. Donc
$$\frac{1}{x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2},$$
de primitive $\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.
- $\dfrac{1}{2x^2-4x+10}$ sur $\mathbb{R}$: $2x^2-4x+10=2\big((x-1)^2+4\big)=8\left(1+\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2\right)$. Donc
$$\frac{1}{2x^2-4x+10}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\times\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2},$$
de primitive $\dfrac{1}{4}\arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$.

Remarque

Pour un numérateur de degré 1, on se ramène aux cas précédents en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du trinôme : $px+q=\dfrac{p}{2a}(2ax+b)+\left(q-\dfrac{pb}{2a}\right)$, ce qui sépare la fraction en un terme de la forme $\dfrac{u'}{u}$ (de primitive $\ln|u|$) et un terme de la forme $\dfrac{\text{constante}}{ax^2+bx+c}$. Par exemple, $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+5}=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$, de primitive $\ln\left(x^2+2x+5\right)+\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

1.5 Primitives de fonctions à valeurs complexes

On a vu dans le chapitre sur les nombres complexes (partie 9) que, pour $m \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto e^{mx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto m\,e^{mx}$. Par lecture inverse :

Primitive de $x \mapsto e^{mx}$

Pour tout $m \in \mathbb{C}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{mx}}{m}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{mx}$.

Remarque

Cette formule contient deux cas à connaître : si $m = a$ est réel non nul, on retrouve $\frac{e^{ax}}{a}$; si $m = a + ib$ avec $b \neq 0$, en prenant la **partie réelle** ou la **partie imaginaire** de $\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$, on obtient des primitives de $e^{ax}\cos(bx)$ et de $e^{ax}\sin(bx)$: c'est la méthode du chapitre sur les nombres complexes (partie 9.3), qui sera reprise en 3.4.

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

2.1 Définition

Définition

Soit f une fonction continue sur I et soient $a, b \in I$. On appelle **intégrale de f de a à b** le nombre

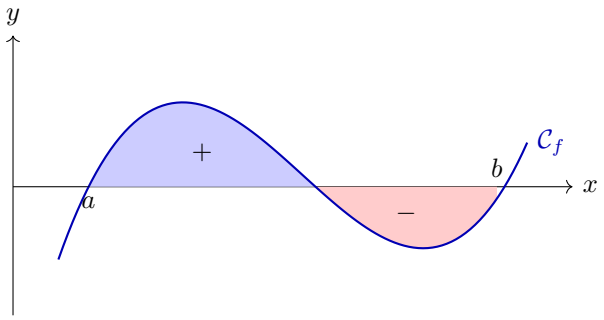
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive quelconque de f sur I. On note aussi $\big[F(t)\big]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Cette définition a un sens : si F et G sont deux primitives de f sur I, elles diffèrent d'une constante C, donc $G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$: le résultat ne dépend pas du choix de la primitive.

Remarque

- La lettre t est une **variable muette** : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$. Elle disparaît une fois l'intégrale calculée, et l'on ne peut donc pas écrire de t en dehors de l'intégrale.
- Pour $a = b$, on a $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et pour $a, b \in I$ quelconques, $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Lorsque f est à valeurs réelles, $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'**aire** du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe de f, pour $x \in [a, b]$. En général, c'est une aire **algébrique** : les parties situées sous l'axe des abscisses sont comptées négativement.



Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction

$$G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a**. En particulier, G est dérivable sur I et $G' = f$.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Par définition, $G(x) = F(x) - F(a)$ pour tout $x \in I$. Donc G est dérivable, de dérivée $F' = f$, et $G(a) = 0$. L'unicité vient du théorème sur les primitives (iii). ■

Remarque

On retrouve ainsi la définition du logarithme (chapitre sur les fonctions usuelles, partie 4.1) : $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est l'unique primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exemple

- $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_0^{\pi/2} = 1$.
- $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4 = 4 - 2 = 2$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \ln 2$.

Intégrale d'une dérivée

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (c'est-à-dire dérivable de dérivée continue) et $a, b \in I$, alors

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Ce résultat est simplement la définition de l'intégrale appliquée à la primitive f de f'.

2.2 Propriétés de l'intégrale

Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et $a, b, c \in I$.

(i) **Linéarité.** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) **Relation de Chasles.**

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(iii) **Positivité.** Si f est à valeurs réelles, $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(iv) **Croissance.** Si f et g sont à valeurs réelles, $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

(v) **Inégalité triangulaire.** Si f est à valeurs réelles et $a \leqslant b$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soient F et G des primitives de f et de g.

- (i) $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$, d'où le résultat en évaluant en b et en a.
- (ii) $\big(F(b) - F(a)\big) + \big(F(c) - F(b)\big) = F(c) - F(a)$.
- (iii) Si $f \geqslant 0$, alors $F' = f \geqslant 0$: F est croissante sur $[a,b]$, donc $F(b) \geqslant F(a)$.
- (iv) On applique (iii) à $g - f \geqslant 0$ et on utilise la linéarité (i).
- (v) On a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sur $[a,b]$, donc par croissance et linéarité,

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

ce qui donne le résultat. ■

Attention

La positivité et la croissance supposent **les bornes dans le bon ordre** ($a \leqslant b$). Si $a > b$, les inégalités s'inversent, puisque $\displaystyle\int_a^b = -\int_b^a$. Par ailleurs, l'inégalité triangulaire pour les intégrales concerne ici des fonctions **réelles**.

Cas de nullité d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$), **positive**. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Comme $F' = f \geqslant 0$, F est croissante. Si $F(b) = F(a)$, alors F est croissante avec même valeur aux deux bornes, donc constante sur $[a,b]$, et $f = F' = 0$. ■

Attention

Ce résultat est **faux** sans l'hypothèse de positivité ou de continuité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$ alors que $t \mapsto t$ n'est pas nulle.

Valeur moyenne

Soit f continue sur $[a,b]$ avec $a < b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

Si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a,b]$, la croissance de l'intégrale donne $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$: la valeur moyenne de f est comprise entre m et M. De même, si $|f| \leqslant M$ sur $[a,b]$, alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M(b-a)$: c'est la **majoration usuelle** d'une intégrale.

Exemple

Montrons que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{3}$. Pour $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2} \leqslant t^2$, donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

2.3 Dérivation d'une intégrale dépendant de ses bornes

Dérivée de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit f continue sur I, et soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, **à valeurs dans** I. Alors la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et

$$\Phi'(x) = v'(x)\,f\big(v(x)\big) - u'(x)\,f\big(u(x)\big).$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Alors $\Phi(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big)$, et la dérivation d'une composée donne $\Phi'(x) = v'(x)F'\big(v(x)\big) - u'(x)F'\big(u(x)\big)$, avec $F' = f$. ■

Exemple

Soit $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ici $u(x) = x$, $v(x) = 2x$ et $f(t) = e^{-t^2}$, donc

$$\Phi'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

On remarque qu'on a pu dériver Φ sans connaître de primitive explicite de $t \mapsto e^{-t^2}$ (qui n'est pas exprimable avec les fonctions usuelles).

3 Techniques de calcul d'intégrales

3.1 Intégration par parties

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La fonction uv est dérivable, de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$, qui est continue. D'après l'intégrale d'une dérivée,

$$\int_a^b \big(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\big)\,\mathrm{d}t = u(b)v(b) - u(a)v(a),$$

et la linéarité de l'intégrale donne la formule. ■

Méthode

Pour calculer une intégrale par parties :

1. on repère dans l'expression un produit $u \times v'$;
2. on choisit u (la partie que l'on **dérive**) et v' (la partie dont on **prend une primitive**), de façon que $u'v$ soit plus simple que uv' ;
3. on vérifie que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment concerné, puis on applique la formule.

En pratique, on dérive un **polynôme** (son degré baisse), ln ou arctan (leur dérivée est une fraction rationnelle), et on prend une primitive de e^x, cos, sin.

Exemple

- **Polynôme × exponentielle.** Calculons $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$:

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - (e-1) = 1.$$

- **Primitive de** ln. Pour $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$: on écrit $\ln t = \ln t \times 1$, avec $u(t) = \ln t$,

$v'(t)=1$, $u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$:

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t\Big]_1^x - \int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln x-(x-1).$$

Donc $x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de ln sur $]0,+\infty[$.

- **Primitive de arctan.** Avec $u=\arctan$, $v'=1$: $\displaystyle\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t = x\arctan x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Deux intégrations par parties successives

Calculons $I=\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin x\,\mathrm{d}x$. Une première intégration par parties, avec $u=\sin$ et $v'=\exp$, donne

$$I=\Big[e^x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi e^x\cos x\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi e^x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Une seconde, avec $u=\cos$ et $v'=\exp$, donne

$$\int_0^\pi e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[e^x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi e^x\sin x\,\mathrm{d}x = -e^\pi-1+I.$$

Ainsi $I=e^\pi+1-I$, d'où $I=\dfrac{e^\pi+1}{2}$. On retrouve la structure « on retombe sur l'intégrale de départ », et l'on résout une équation d'inconnue I. (La méthode du paragraphe 3.4, par les nombres complexes, est souvent plus rapide pour ce type d'intégrale.)

Intégrales de Wallis

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$. On a $W_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $W_1=\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi/2}=1$. Pour calculer W_{n+2}, on écrit $\sin^{n+2}t=\sin^{n+1}t\times\sin t$ et on intègre par parties avec $u(t)=\sin^{n+1}t$ et $v'(t)=\sin t$, donc $u'(t)=(n+1)\sin^n t\cos t$ et $v(t)=-\cos t$:

$$W_{n+2}=\Big[-\sin^{n+1}t\cos t\Big]_0^{\pi/2}+(n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet est nul. En écrivant $\cos^2 t=1-\sin^2 t$, on obtient

$$W_{n+2}=(n+1)\big(W_n-W_{n+2}\big),\qquad\text{donc}\qquad (n+2)\,W_{n+2}=(n+1)\,W_n.$$

On obtient ainsi la **relation de récurrence de Wallis** :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n}$$

Par exemple, $W_2=\dfrac{1}{2}W_0=\dfrac{\pi}{4}$, puis $W_4=\dfrac{3}{4}W_2=\dfrac{3\pi}{16}$; de même $W_3=\dfrac{2}{3}W_1=\dfrac{2}{3}$, puis $W_5=\dfrac{4}{5}W_3=\dfrac{8}{15}$.

3.2 Changement de variable

Changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J, **à valeurs dans** I. Pour tous $\alpha, \beta \in J$:

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. La fonction $F \circ \varphi$ est dérivable sur J et $(F\circ\varphi)' = \varphi' \times (F'\circ\varphi) = \varphi' \times (f\circ\varphi)$, qui est continue. Donc

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

Méthode

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par le changement de variable $x = \varphi(t)$:

1. on vérifie que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle des valeurs de t considérées, et à valeurs dans l'intervalle où f est continue ;
2. on **change les bornes** : on détermine α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$;
3. on remplace x par $\varphi(t)$ et $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ (c'est une règle d'écriture pratique, qui traduit la formule du théorème lue de droite à gauche) ;
4. on calcule la nouvelle intégrale, **sans revenir à la variable** x (les bornes ont déjà été changées).

Exemple

- **Racine carrée.** Calculons $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$. On pose $x = t^2$, avec $t \in [1,2]$ ($\varphi(t) = t^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\varphi'(t) = 2t$). Les bornes $x = 1$ et $x = 4$ correspondent à $t = 1$ et $t = 2$, et $\sqrt{x} = t$ car $t > 0$:

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{2}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[2\ln(t+1)\Big]_1^2 = 2\ln\frac{3}{2}.$$

- **Aire du quart de disque.** Calculons $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. On pose $x = \sin t$ avec $t \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$ ($\varphi = \sin$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi'(t) = \cos t$). Les bornes $x = 0$ et $x = 1$ correspondent à $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$. Comme $\cos t \geqslant 0$ sur $\big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, on a $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ et

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

  C'est bien l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

- **Exponentielle.** Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$. On pose $t = e^x$, c'est-à-dire $x = \ln t$ avec

$t \in [1, e]$, donc $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t}{t+1}\right]_1^e = \ln \frac{2e}{e+1}.$$

Attention

Les erreurs classiques sont : oublier de **changer les bornes** ; oublier le facteur $\varphi'(t)$ (le $\mathrm{d}x$ devient $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, et non $\mathrm{d}t$) ; simplifier $\sqrt{\varphi(t)^2}$ en $\varphi(t)$ sans vérifier le signe, alors que $\sqrt{y^2} = |y|$.

3.3 Parité et périodicité

Intégrales et symétries

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

(i) Si f est **paire**, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) Si f est **impaire**, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(iii) Si f est **périodique** de période T, alors $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est **constante**, égale à $\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Pour (i) et (ii), la relation de Chasles donne $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f$. Dans la première, on pose $t = -s$, avec $\varphi(s) = -s$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi'(s) = -1$, ce qui change les bornes $-a$ et 0 en a et 0 :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(-s)\,(-1)\,\mathrm{d}s = \int_0^a f(-s)\,\mathrm{d}s.$$

Si f est paire, $f(-s) = f(s)$ et on obtient (i) ; si f est impaire, $f(-s) = -f(s)$ et les deux morceaux se compensent, d'où (ii). Pour (iii), posons $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+T) - F(x)$ où F est une primitive de f. Alors $G'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$: G est constante, donc égale à $G(0) = \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Exemple

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ car $t \mapsto \frac{t^3}{1+t^2}$ est impaire.
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \big(1 + \cos(2t)\big)\,\mathrm{d}t = \pi.$
- $\displaystyle\int_5^{5+2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 0.$

3.4 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue, avec $f = g + ih$, où $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions réelles continues. On pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette définition est compatible avec celle de l'intégrale par une primitive : si $F = G + iH$ est une primitive de f, alors G et H sont des primitives de g et de h, et $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$. La linéarité (avec des coefficients complexes) et la relation de Chasles restent valables, et l'on a, pour tout $m \in \mathbb{C}^*$:

$$\int_a^b e^{mt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{mt}}{m}\right]_a^b.$$

En revanche, **les inégalités** (positivité, croissance) n'ont pas de sens pour des fonctions à valeurs complexes.

Calcul de $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ et $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$:

1. on écrit $e^{ax}\cos(bx) = \mathrm{Re}\big(e^{(a+ib)x}\big)$ et $e^{ax}\sin(bx) = \mathrm{Im}\big(e^{(a+ib)x}\big)$;
2. on calcule l'intégrale (ou une primitive) de $e^{(a+ib)x}$, qui est $\dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$;
3. on prend la partie réelle ou la partie imaginaire du résultat, après avoir multiplié le numérateur et le dénominateur par $a - ib$ pour mettre sous forme algébrique.

Exemple

Calculons $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} e^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x\right)$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{(1+i)\pi/2} - 1}{1+i} = \frac{ie^{\pi/2} - 1}{1+i} \\ &= \frac{(ie^{\pi/2} - 1)(1-i)}{2} = \frac{(e^{\pi/2} - 1) + i(e^{\pi/2} + 1)}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi $J = \dfrac{e^{\pi/2} - 1}{2}$, et la partie imaginaire donne au passage

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

4 Équations différentielles linéaires du premier ordre

4.1 Vocabulaire

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soient a et b deux fonctions **continues** sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** l'équation d'inconnue y :

$$(E) \qquad y' + a(x)\, y = b(x).$$

Une **solution** de (E) sur I est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I vérifiant (E) pour tout $x \in I$. L'équation

$$(E_0) \qquad y' + a(x)\, y = 0$$

est appelée **équation homogène** (ou **sans second membre**) associée à (E).

Remarque

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver **toutes** les fonctions qui la vérifient : la réponse est un *ensemble* de fonctions. Le mot « linéaire » signifie que l'inconnue y et sa dérivée y' apparaissent au premier degré, sans produit ni composée : si y_1 et y_2 sont solutions de (E_0) et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de (E_0).

Attention

Une équation comme $x\, y' + y = 1$ n'est pas directement de la forme (E) : il faut d'abord la **normaliser** en divisant par le coefficient de y', ce qui n'est possible que sur un intervalle où ce coefficient ne s'annule pas. Ici, on résout séparément sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, en écrivant $y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{1}{x}$.

4.2 Résolution de l'équation homogène

Solutions de $y' + a(x)y = 0$

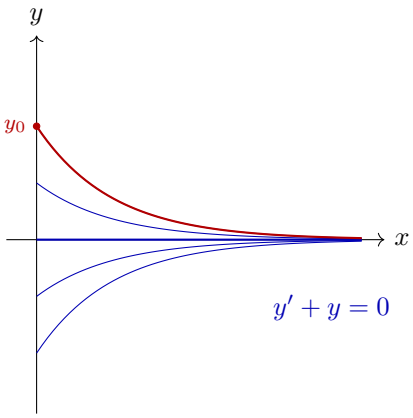
Soit A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de (E_0) sont exactement les fonctions

$$y_h : x \mapsto \lambda\, e^{-A(x)}, \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Démonstration. Soit y une fonction dérivable sur I. La fonction $x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ est dérivable, de dérivée $\big(y'(x) + a(x)y(x)\big)e^{A(x)}$. Comme $e^{A(x)} \neq 0$, y est solution de (E_0) si et seulement si $\big(ye^{A}\big)' = 0$ sur I, c'est-à-dire si et seulement si ye^{A} est constante sur l'intervalle I, soit $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$. ■

Remarque

- Si a est **constante** ($a \in \mathbb{K}$), on peut prendre $A(x) = ax$ et les solutions de $y' + ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-ax}$.
- Les solutions de (E_0) forment une **droite vectorielle** : toutes sont proportionnelles à une solution non nulle $x \mapsto e^{-A(x)}$. Le choix de A n'a pas d'importance, car deux primitives diffèrent d'une constante, ce qui change seulement la valeur de λ.



Pour $a = 1$, les courbes $y = \lambda e^{-x}$ (en bleu) remplissent le plan sans se croiser : par un point $(0, y_0)$ passe exactement une courbe (en rouge).

Exemple

- $y' - 3y = 0$: $a = -3$, $A(x) = -3x$, solutions $x \mapsto \lambda e^{3x}$.
- $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ sur $]0, +\infty[$: $A(x) = \ln x$, solutions $x \mapsto \lambda e^{-\ln x} = \dfrac{\lambda}{x}$.
- $y' + (2x)\, y = 0$ sur $\mathbb{R}$: $A(x) = x^2$, solutions $x \mapsto \lambda e^{-x^2}$.
- $y' - i\, y = 0$ sur $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{C}$) : solutions $x \mapsto \lambda e^{ix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

4.3 Structure des solutions de l'équation complète

Structure des solutions

Si y_p est une solution particulière de (E) sur I, alors les solutions de (E) sur I sont exactement les fonctions

$$y = y_p + y_h,$$

où y_h décrit l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0).

Démonstration. Soit y dérivable sur I. Comme $y_p' + a y_p = b$, on a

$$(y - y_p)' + a(y - y_p) = \big(y' + ay\big) - b.$$

Donc y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de (E_0). ■

Principe de superposition

Soient b_1 et b_2 continues sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si y_1 est solution de $y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 solution de $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y' + a(x)y = \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$.

Cela découle de la linéarité de la dérivation. En pratique, on l'utilise pour traiter un second membre qui est une **somme** de termes usuels.

4.4 Méthode de variation de la constante

Pour trouver une solution particulière dans le cas général, on cherche y_p sous la forme

$$y_p(x) = \lambda(x)\, e^{-A(x)},$$

où la constante λ des solutions homogènes est remplacée par une **fonction** λ, à déterminer.

Variation de la constante

Soit A une primitive de a sur I. Une fonction $y = \lambda\, e^{-A}$ (avec λ dérivable sur I) est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(x) = b(x)\, e^{A(x)}.$$

Ainsi, si Λ est une primitive de $b\, e^{A}$ sur I, les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto \big(\Lambda(x) + \lambda_0\big) e^{-A(x)}, \qquad \lambda_0 \in \mathbb{K}.$$

Démonstration. Si $y = \lambda e^{-A}$, alors $y' = \lambda' e^{-A} - a\lambda e^{-A}$, donc $y' + ay = \lambda' e^{-A}$. Cette quantité est égale à b si et seulement si $\lambda' = be^{A}$. Toute solution de (E) est de la forme λe^{-A} (en posant $\lambda = ye^{A}$), d'où la description complète. ■

Exemple

Résolvons $y' + \dfrac{1}{x}y = x$ sur $]0, +\infty[$. On a $A(x) = \ln x$ et $e^{A(x)} = x$. On cherche $y = \lambda(x)\, e^{-\ln x} = \dfrac{\lambda(x)}{x}$ avec $\lambda'(x) = x \times x = x^2$, donc $\lambda(x) = \dfrac{x^3}{3} + \lambda_0$. Les solutions sont les fonctions

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{\lambda_0}{x}, \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

Vérification de $y_p(x) = \frac{x^2}{3}$: $y_p' + \frac{1}{x} y_p = \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = x$.

Exemple

Résolvons $x\, y' - 2y = x^3$ sur $]0, +\infty[$. On normalise : $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2$. Ici $a(x) = -\dfrac{2}{x}$, $A(x) = -2\ln x$, $e^{A(x)} = \dfrac{1}{x^2}$ et $e^{-A(x)} = x^2$. On cherche $y = \lambda(x)\, x^2$ avec $\lambda'(x) = x^2 \times \dfrac{1}{x^2} = 1$, donc $\lambda(x) = x + \lambda_0$. Les solutions sont les fonctions

$$y(x) = x^3 + \lambda_0 x^2, \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

4.5 Équations à coefficient constant : recherche d'une solution particulière

On considère maintenant (E) : $y' + ay = b(x)$ avec $a \in \mathbb{K}$ **constant**. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-ax}$. Pour trouver une solution particulière, on la cherche **de la même forme que le second membre**.

Solutions particulières de $y' + ay = b(x)$

Soit $a \in \mathbb{K}$.

(i) **Second membre exponentiel.** Pour $b(x) = Ae^{mx}$ avec $A, m \in \mathbb{K}$:

- si $m \neq -a$, la fonction $y_p(x) = \dfrac{A}{m+a}\, e^{mx}$ est solution particulière ;
- si $m = -a$ (**cas de résonance**), la fonction $y_p(x) = A\, x\, e^{mx}$ est solution particulière.

(ii) **Second membre polynomial.** Si b est un polynôme de degré n et $a \neq 0$, il existe une solution particulière polynomiale de degré n. Si $a = 0$, il suffit de prendre une primitive de b (polynôme de degré $n+1$).

(iii) **Second membre trigonométrique.** Pour $b(x) = B\cos(\omega x)$ (resp. $B\sin(\omega x)$), avec $a, B, \omega \in \mathbb{R}$, on cherche une solution particulière de $y' + ay = Be^{i\omega x}$, et l'on en prend la partie réelle (resp. la partie imaginaire).

Justification. (i) Si $y = ke^{mx}$, alors $y' + ay = k(m+a)e^{mx}$, égal à Ae^{mx} pour $k = \frac{A}{m+a}$ lorsque $m + a \neq 0$. Si $m = -a$ et $y = Axe^{mx}$, alors $y' + ay = Ae^{mx} + Amxe^{mx} + aAxe^{mx} = Ae^{mx}$ car $m + a = 0$. (iii) Si $y = u + iv$ est solution de $y' + ay = Be^{i\omega x}$, avec a réel, alors en prenant les parties réelle et imaginaire de cette égalité on obtient $u' + au = B\cos(\omega x)$ et $v' + av = B\sin(\omega x)$. (ii) s'obtient en cherchant $y_p = \sum c_k x^k$ de degré n et en identifiant les coefficients. ■

Exemple

- $y' + 2y = e^x$: $m = 1 \neq -2$, $y_p(x) = \dfrac{1}{3}e^x$.
- $y' - y = e^x$: ici $a = -1$ et $m = 1 = -a$ (résonance), $y_p(x) = xe^x$. Vérification : $y_p' - y_p = e^x + xe^x - xe^x = e^x$.
- $y' + y = x^2$: on cherche $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Alors $y_p' + y_p = \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)$, d'où $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 2$: $y_p(x) = x^2 - 2x + 2$.
- $y' + 2y = \cos x$: on cherche une solution de $y' + 2y = e^{ix}$, soit $y = \dfrac{e^{ix}}{i+2} = \dfrac{(2-i)(\cos x + i\sin x)}{5}$, de partie réelle $\dfrac{2\cos x + \sin x}{5}$. Donc $y_p(x) = \dfrac{2\cos x + \sin x}{5}$ (vérification : $y_p' + 2y_p = \frac{-2\sin x + \cos x}{5} + \frac{4\cos x + 2\sin x}{5} = \cos x$).

Second membre somme de deux termes

Résolvons $y' + 2y = e^x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$. Par superposition, $y_p(x) = \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{2\cos x + \sin x}{5}$ est solution particulière. Les solutions homogènes sont λe^{-2x}, donc l'ensemble des solutions est

$$y(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2\cos x + \sin x}{5} + \lambda e^{-2x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.6 Problème de Cauchy

Problème de Cauchy

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. L'équation (E) admet une **unique** solution y sur I vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. Les solutions sont les fonctions $y = y_p + \lambda e^{-A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. La condition $y(x_0) = y_0$ s'écrit $y_p(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0$, soit $\lambda = \big(y_0 - y_p(x_0)\big)e^{A(x_0)}$: il y a exactement une valeur de λ qui convient. ■

Remarque

Graphiquement (voir la figure du paragraphe 4.2), **par chaque point (x_0, y_0) passe une courbe intégrale et une seule**.

Résolution d'une équation $y' + a(x)y = b(x)$ avec condition initiale

1. **Mettre l'équation sous forme normalisée** $y' + a(x)y = b(x)$ sur un intervalle I où a et b sont continues.
2. **Résoudre l'équation homogène** : $y_h(x) = \lambda e^{-A(x)}$.
3. **Chercher une solution particulière** y_p : forme du second membre si a est constant, variation de la constante sinon.
4. **Conclure** : les solutions sont $y_p + y_h$.
5. Si une condition initiale $y(x_0) = y_0$ est imposée, **déterminer λ à la fin**, en utilisant la solution générale complète (et non la solution homogène seule).

Exemple

Résolvons le problème de Cauchy $y' + 2y = \cos x$, $y(0) = 1$. Les solutions de l'équation sont $y(x) = \dfrac{2\cos x + \sin x}{5} + \lambda e^{-2x}$. La condition initiale donne $y(0) = \dfrac{2}{5} + \lambda = 1$, d'où $\lambda = \dfrac{3}{5}$. L'unique solution est

$$y(x) = \frac{2\cos x + \sin x}{5} + \frac{3}{5}e^{-2x}.$$

Attention

On détermine la constante λ en dernier : déterminer λ à partir de la seule solution homogène, avant d'ajouter la solution particulière, est une erreur très fréquente.

5 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

5.1 Vocabulaire et structure

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, et d une fonction **continue** sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation d'inconnue y :

$$(E) \qquad a\,y'' + b\,y' + c\,y = d(x).$$

Une **solution** de (E) sur I est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I vérifiant (E). L'équation (E_0) : $ay''+by'+cy=0$ est l'**équation homogène** associée. L'équation d'inconnue $r \in \mathbb{K}$

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

est appelée **équation caractéristique** de (E). On note $P(r) = ar^2 + br + c$ le polynôme associé, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Structure des solutions

(i) Si y_p est une solution particulière de (E), les solutions de (E) sont exactement les fonctions $y_p + y_h$, où y_h décrit les solutions de (E_0).

(ii) **Principe de superposition.** Si y_1 est solution de $ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et y_2 solution de $ay'' + by' + cy = d_2(x)$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = \lambda d_1(x) + \mu d_2(x)$.

Justification. Elle est identique à celle du premier ordre, et repose sur la linéarité de la dérivation : la fonction $y \mapsto ay'' + by' + cy$ vérifie $L(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda L(y_1) + \mu L(y_2)$. Par exemple pour (i), $L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = L(y) - d$, qui est nul si et seulement si y est solution de (E).

5.2 Résolution de l'équation homogène

L'idée est de chercher des solutions de la forme $x \mapsto e^{rx}$. Comme $(e^{rx})' = re^{rx}$ et $(e^{rx})'' = r^2e^{rx}$, on a

$$a\,(e^{rx})'' + b\,(e^{rx})' + c\,e^{rx} = P(r)\,e^{rx}.$$

La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est donc solution de (E_0) **si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique**.

Solutions de $ay'' + by' + cy = 0$

- **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.**
  - Si $\Delta \neq 0$ (deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$) : $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
  - Si $\Delta = 0$ (racine double r) : $y(x) = (\lambda + \mu x)\,e^{rx}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
- **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$** (coefficients réels, solutions réelles).
  - Si $\Delta > 0$ (racines réelles $r_1 \neq r_2$) : $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  - Si $\Delta = 0$ (racine double réelle r) : $y(x) = (\lambda + \mu x)\,e^{rx}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  - Si $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, avec $\beta > 0$) : $y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Éléments de justification (le théorème est admis). Dans le cas $\Delta \neq 0$, les fonctions $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ sont solutions, donc leurs combinaisons linéaires aussi. Dans le cas $\Delta = 0$, $r = -\frac{b}{2a}$ est

racine double, c'est-à-dire $P(r)=0$ et $P'(r)=2ar+b=0$, et un calcul de dérivées montre que

$$a\,(xe^{rx})''+b\,(xe^{rx})'+c\,xe^{rx}=\big(P(r)\,x+P'(r)\big)e^{rx}=0,$$

donc xe^{rx} est aussi solution. Dans le cas réel $\Delta<0$, on prend la partie réelle et la partie imaginaire de la solution complexe $e^{(\alpha+i\beta)x}$, ce qui donne les deux solutions réelles

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x)=\mathrm{Re}\big(e^{(\alpha+i\beta)x}\big),\qquad e^{\alpha x}\sin(\beta x)=\mathrm{Im}\big(e^{(\alpha+i\beta)x}\big).$$

Attention

Si les coefficients sont réels et que l'on cherche des solutions **réelles**, on n'écrit pas $\lambda e^{(\alpha+i\beta)x}+\mu e^{(\alpha-i\beta)x}$ avec des constantes complexes quelconques : on écrit $e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x)+\mu\sin(\beta x)\big)$ avec λ,μ **réels**.

Exemple

- $y''-3y'+2y=0$: $r^2-3r+2=(r-1)(r-2)$, racines 1 et 2. Solutions : $\lambda e^x+\mu e^{2x}$.
- $y''+2y'+y=0$: $r^2+2r+1=(r+1)^2$, racine double -1. Solutions : $(\lambda+\mu x)e^{-x}$.
- $y''+2y'+5y=0$: $\Delta=4-20=-16$, racines $-1\pm 2i$. Solutions : $e^{-x}\big(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)\big)$.
- $y''+\omega^2 y=0$ $(\omega>0)$: racines $\pm i\omega$, solutions $\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)$ (oscillations sinusoïdales).
- $y''-\omega^2 y=0$ $(\omega>0)$: racines $\pm\omega$, solutions $\lambda e^{\omega x}+\mu e^{-\omega x}$.

5.3 Problème de Cauchy

Problème de Cauchy (admis)

Soient $x_0\in I$ et $y_0,y_1\in\mathbb{K}$. L'équation (E) admet une **unique** solution y sur I vérifiant les deux conditions initiales

$$y(x_0)=y_0\qquad\text{et}\qquad y'(x_0)=y_1.$$

Exemple

- $y''-3y'+2y=0, y(0)=1, y'(0)=0$. On a $y(x)=\lambda e^x+\mu e^{2x}$ et $y'(x)=\lambda e^x+2\mu e^{2x}$. Les conditions initiales donnent $\lambda+\mu=1$ et $\lambda+2\mu=0$, donc $\mu=-1$ et $\lambda=2$: $y(x)=2e^x-e^{2x}$.
- $y''-2y'+y=0, y(0)=1, y'(0)=3$. On a $y(x)=(\lambda+\mu x)e^x$ et $y'(x)=(\lambda+\mu+\mu x)e^x$. Donc $\lambda=1$ et $\lambda+\mu=3$, soit $\mu=2$: $y(x)=(1+2x)e^x$.
- $y''+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. On a $y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$ et $y'(x)=-\lambda\sin x+\mu\cos x$, donc $\lambda=0$ et $\mu=1$: $y(x)=\sin x$.

5.4 Recherche d'une solution particulière

Comme au premier ordre, on cherche une solution particulière **de la même forme que le second membre**, avec une modification dans les cas de résonance.

Second membre exponentiel : $ay'' + by' + cy = Ae^{mx}$

Soient $A, m \in \mathbb{K}$ et $P(r) = ar^2 + br + c$.

(i) Si m n'est **pas racine** de P (c'est-à-dire $P(m) \neq 0$) : $y_p(x) = \dfrac{A}{P(m)}\, e^{mx}$ est solution particulière.

(ii) Si m est **racine simple** de P (c'est-à-dire $P(m) = 0$ et $P'(m) = 2am + b \neq 0$) : $y_p(x) = \dfrac{A}{P'(m)}\, x\, e^{mx}$ est solution particulière.

(iii) Si m est **racine double** de P : $y_p(x) = \dfrac{A}{2a}\, x^2\, e^{mx}$ est solution particulière.

Démonstration. On calcule, pour $k \in \{0, 1, 2\}$, l'action de l'opérateur $L(y) = ay'' + by' + cy$ sur $x^k e^{mx}$:

$$L\big(e^{mx}\big) = P(m)\, e^{mx}, \qquad L\big(xe^{mx}\big) = \big(P(m)\, x + P'(m)\big)e^{mx},$$
$$L\big(x^2 e^{mx}\big) = \big(P(m)\, x^2 + 2P'(m)\, x + 2a\big)e^{mx}.$$

Dans le cas (i), $L\big(\frac{A}{P(m)}e^{mx}\big) = Ae^{mx}$. Dans le cas (ii), $P(m) = 0$ donc $L\big(xe^{mx}\big) = P'(m)e^{mx}$ et $L\big(\frac{A}{P'(m)}xe^{mx}\big) = Ae^{mx}$. Dans le cas (iii), $P(m) = P'(m) = 0$ donc $L\big(x^2e^{mx}\big) = 2ae^{mx}$ et $L\big(\frac{A}{2a}x^2e^{mx}\big) = Ae^{mx}$. ■

Second membre trigonométrique

Soient $B, \omega \in \mathbb{R}$ et a, b, c réels. Pour trouver une solution particulière de $ay'' + by' + cy = B\cos(\omega x)$ (resp. $B\sin(\omega x)$) :

1. on cherche une solution particulière z_p (à valeurs complexes) de $az'' + bz' + cz = Be^{i\omega x}$, avec le théorème précédent pour $m = i\omega$;
2. on prend $y_p = \mathrm{Re}(z_p)$ (resp. $y_p = \mathrm{Im}(z_p)$).

Cela fonctionne car les coefficients sont réels : $\mathrm{Re}\big(az'' + bz' + cz\big) = a\,\mathrm{Re}(z)'' + b\,\mathrm{Re}(z)' + c\,\mathrm{Re}(z)$, et de même pour la partie imaginaire.

Exemple

- $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$: $P(r) = r^2 - 3r + 2$, $P(3) = 2 \neq 0$, donc $y_p(x) = \dfrac{1}{2}e^{3x}$. Les solutions sont $y(x) = \dfrac{1}{2}e^{3x} + \lambda e^x + \mu e^{2x}$.
- $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$: $m = 2$ est racine simple de P, avec $P'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$. Donc $y_p(x) = xe^{2x}$. (Vérification : $y_p' = (1 + 2x)e^{2x}$, $y_p'' = (4 + 4x)e^{2x}$, et $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = e^{2x}\big(4 + 4x - 3 - 6x + 2x\big) = e^{2x}$.)
- $y'' + 2y' + y = e^{-x}$: $m = -1$ est racine double de $P(r) = (r + 1)^2$, donc $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$. Les solutions sont $y(x) = \Big(\dfrac{1}{2}x^2 + \lambda + \mu x\Big)e^{-x}$.
- $y'' + y = \cos x$ (**résonance**) : on cherche une solution de $z'' + z = e^{ix}$. Ici $P(r) = r^2 + 1$, $m = i$ est racine simple et $P'(i) = 2i$, donc $z_p(x) = \dfrac{xe^{ix}}{2i} = \dfrac{x\big(\sin x - i\cos x\big)}{2}$. On en déduit $y_p(x) = \mathrm{Re}(z_p) = \dfrac{x\sin x}{2}$ (et

$\frac{-x\cos x}{2}$ pour le second membre $\sin x$).

- $y'' + 2y' + 2y = \cos x$: $P(r) = r^2 + 2r + 2$, $P(i) = 1 + 2i \neq 0$. On a $z_p(x) = \frac{e^{ix}}{1+2i} = \frac{(1-2i)e^{ix}}{5}$, d'où $y_p(x) = \mathrm{Re}(z_p) = \frac{\cos x + 2\sin x}{5}$.

Remarque

- Pour un second membre **polynomial** de degré n, si $c \neq 0$, on cherche une solution particulière polynomiale de degré n (on identifie les coefficients). Par exemple, pour $y'' - y = x$, on cherche $y_p = \alpha x + \beta$: $-\alpha x - \beta = x$ donne $y_p(x) = -x$.
- Pour un second membre **somme** de plusieurs termes usuels, on utilise le principe de superposition.
- La **résonance** ($P(m) = 0$) apparaît quand le second membre e^{mx} est lui-même solution de l'équation homogène : on multiplie alors par x (racine simple) ou x^2 (racine double). Pour $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega x)$, le facteur x fait croître l'amplitude des oscillations : c'est le phénomène physique de résonance.

Résolution d'une équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ avec conditions initiales

1. **Équation caractéristique** $ar^2 + br + c = 0$: calculer Δ et les racines.
2. **Solutions de l'équation homogène**, selon le signe de Δ (et le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
3. **Solution particulière** de (E) : de la forme du second membre, avec multiplication par x ou x^2 en cas de résonance.
4. **Solution générale** : $y_p + y_h$.
5. **Conditions initiales** $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$: on dérive la solution générale **complète**, on écrit les deux équations et l'on résout le système en (λ, μ).

Exemple

Résolvons $y'' + 2y' + 2y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

1. $r^2 + 2r + 2 = 0$: $\Delta = 4 - 8 = -4$, racines $-1 \pm i$.
2. Solutions homogènes : $e^{-x}\big(\lambda\cos x + \mu\sin x\big)$.
3. Solution particulière (voir ci-dessus) : $y_p(x) = \frac{\cos x + 2\sin x}{5}$.
4. Solutions : $y(x) = e^{-x}\big(\lambda\cos x + \mu\sin x\big) + \frac{\cos x + 2\sin x}{5}$.
5. On dérive : $y'(x) = e^{-x}\big((\mu - \lambda)\cos x - (\lambda + \mu)\sin x\big) + \frac{-\sin x + 2\cos x}{5}$. Les conditions initiales donnent $y(0) = \lambda + \frac{1}{5} = 0$ et $y'(0) = \mu - \lambda + \frac{2}{5} = 0$, donc $\lambda = -\frac{1}{5}$ puis $\mu = -\frac{3}{5}$.

L'unique solution est

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{5}\big(\cos x + 3\sin x\big) + \frac{\cos x + 2\sin x}{5}.$$

Récapitulatif

Équation	**Solutions**
$y' + a(x)y = 0$	$\lambda e^{-A(x)}$, avec $A' = a$
$y' + a(x)y = b(x)$	$y_p + \lambda e^{-A(x)}$; y_p par variation de la constante ($\lambda' = be^{A}$) ou de la forme de b si a est constant
$ay'' + by' + cy = 0$, racines $r_1 \neq r_2$	$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$ay'' + by' + cy = 0$, racine double r	$(\lambda + \mu x)e^{rx}$
$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta < 0$ (réel)	$e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big)$, racines $\alpha \pm i\beta$
$ay'' + by' + cy = Ae^{mx}$	$\dfrac{A}{P(m)}e^{mx}$; $\dfrac{A}{P'(m)}xe^{mx}$ si m racine simple ; $\dfrac{A}{2a}x^2e^{mx}$ si m racine double
$ay'' + by' + cy = B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$	partie réelle ou imaginaire d'une solution particulière avec second membre $Be^{i\omega x}$