(12)

a) $I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

$t = \sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$I = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$

$x=1 \to t=1$

$x=4 \to t=2$

$I = 2\int_1^2 \frac{1}{1+t}\,dt = 2\left[\ln(1+t)\right]_{t=1}^{t=2}$

$= 2\ln 3 - 2\ln 2 = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$

b) $J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

$t = e^x$

$dt = e^x\,dx$

$x=0 \to t=1$

$x=\ln 3 \to t=3$

$e^{2x} = (e^x)^2 = t^2$

$J = \int_1^3 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$J = \text{Arctan}\,3 - \text{Arctan}\,1 = \text{Arctan}\,3 - \frac{\pi}{4}$

c) $K = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$ avec $t = \cos x$

$dt = -\sin x\,dx$

$K = \int_0^{\pi/2} (-\sin^2 x)(-\sin x)\,dx$

Or $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$K = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x - 1)(-\sin x)\,dx$

$\downarrow dt$

$x=0 \to t = \cos 0 = 1$

$x=\pi/2 \to t = \cos \pi/2 = 0$

$$K = \int_1^0 t^2 - 1 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^0 = \frac{2}{3}$$

(13) b) $L = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ $\qquad t = \ln x \longrightarrow \begin{cases} x=1 \to t=0 \\ x=e \to t=1 \end{cases}$

$dt = \frac{1}{x} dx$

$$L = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln(1+t) \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \ln 2$$

c) $M = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$ $\qquad t = x^4 ? \to dt = 4x^3 dx$

$t = x^2 \to dt = 2x \, dx$

$$M = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^4} dx$$

$\begin{cases} x=0 \to t=0 \\ x=1 \to t=1 \end{cases}$

$$M = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} (\text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0)$$

$\text{Arctan } 1 \to \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\pi}{8}$$

---

(14) $N = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx$ $\qquad \int u'v = [uv] - \int uv'$

→ Énoncé alternatif : faire 2 I.P.P. pour exprimer N en fonction d'elle-même.

$u'(x) = \cos x$ $\quad v(x) = e^{2x}$

$u(x) = \sin x$ $\quad v'(x) = 2e^{2x}$

$$N = \left[\sin x \, e^{2x} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x \, dx$$

$$N = -2 \int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx$$

$u'(x) = \sin x$ $\quad v(x) = e^{2x}$

$u(x) = -\cos x$ $\quad v'(x) = 2e^{2x}$

$$N = -2 \left(\left[-\cos x \, e^{2x} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) 2e^{2x} dx \right)$$

$$N = -2 \left(e^{2\pi} + 1 + 2 \int_0^{\pi} \cos x \, e^{2x} dx \right) -$$

$$N = -2e^{2\pi} - 2 - 4N$$

$$5N = -(2+2e^{2\pi})$$

$$N = -\frac{2+2e^{2\pi}}{5}$$

En complexes : $\cos x\, e^{2x} = \mathrm{Re}\left(e^{ix} e^{2x}\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{(i+2)x}\right)$$

Primitive de $x \mapsto \cos x\, e^{2x}$:

$$F(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(i+2)x}}{i+2}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-i+2}{1^2+2^2}(\cos x + i\sin x)e^{2x}\right)$$

$$= \frac{e^{2x}}{5}\mathrm{Re}\left((2-i)(\cos x + i\sin x)\right)$$

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{5}(2\cos x + \sin x)$$

Ainsi, $\int_0^{\pi} \cos x\, e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{5}(2\cos x + \sin x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\left(-e^{2\pi} - 1\right)$

b) $\int_0^x e^{-t}\sin(3t)\,dt$?

$$e^{-x}\sin(3x) = e^{-x}\,\mathrm{Im}\left(e^{i3x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{-x} e^{i3x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{(-1+3i)x}\right)$$

Primitive : $G(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(-1+3i)x}}{-1+3i}\right)$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{10}(-1-3i)e^{-x} e^{i3x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-x}}{10} \underbrace{(-1-3i)(\cos 3x + i \sin 3x)}_{e^{i3x}} \right)$$

$$G(x) = \frac{e^{-x}}{10}\left(-\sin(3x) - 3\cos(3x)\right)$$

15

a) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$

$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$ $\quad a, b$

$(a+b)^4 \to 1\ 4\ 6\ 4\ 1$ (1 ; 1 1 ; 1 2 1 ; 1 3 3 1)

$a^4 \quad a^3 b \quad a^2 b^2 \quad a b^3 \quad b^4$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{i4x} + e^{-i4x}}_{2\cos(4x)} + 4\underbrace{\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right)}_{2\cos(2x)} + 6\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

Primitive : $F(x) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$

$$F(x) = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx = \left[F(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{3\pi}{16}$$

b) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$?

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x)$$

$\cos(2y) = 1 - 2\sin^2 y$ $\quad$ $y = 2x$:

$\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$

$\times \frac{1}{8}$

$$2\sin^2(2x) = 1 - \cos(4x)$$

$$\underbrace{\frac{1}{4}\sin^2(2x)}_{\sin^2 x \cos^2 x} = \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)}_{\text{primitive}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \left[\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi/8$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (2)$$

$$(2) - (1) \rightarrow \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$$

$$(1) + (2) \rightarrow \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

$$(3) \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(4) \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(3) + (4) : \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$$

Primitive de $f(x) = \cos^4(2x)\sin^3(7x)$?

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$(2) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$(2) \quad \cos(2x) \times \cos(2x) = \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1)$$

$$(\cos^2(2x))^2 = \frac{1}{4}\left(\cos^2(4x) + 2\cos(4x) + 1\right)$$

Or $\cos^2(4x) \underset{(2)}{=} \frac{1}{2}(\cos(8x)+1)$

$$\cos^4(2x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\cos(8x)+1) + 2\cos(4x) + 1\right)$$
$$= \frac{1}{8}\cos(8x) + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(4x)$$

$\sin(7x) \times \sin(7x) = \ldots$

à finir pour 14h00

Cours IV Equations différentielles linéaires du 1er ordre

1) Equation homogène

I est un intervalle, $a : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue. L'équation :

$$(E_H) \quad y' + a(x)y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ (i.e. $y : I \to \mathbb{K}$ est dérivable, et y' est continue)

est appelée équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre.

Propriété (solutions de cette équation)

Si $A : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de a, l'ensemble des solutions de (E_H) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} y : I \to \mathbb{K} \\ y : x \mapsto Ce^{-A(x)} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{K} \right\}$$

Preuve : Si $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, on note

$$z(x) = e^{A(x)} y(x), \text{ où } z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$$

et si $x \in I$: $y(x) = z(x) e^{-A(x)}$

d'où : $y'(x) = z'(x) e^{-A(x)} + z(x)\left(-A'(x) e^{-A(x)}\right)$

$$= z'(x) e^{-A(x)} - a(x) z(x) e^{-A(x)}$$

Ainsi, l'équation (E_H) équivaut à :

$$(E_H) \quad y' + a(x) y = 0 \quad \Big| \quad z'(x) e^{-A(x)} - a(x) z(x) e^{-A(x)} + a(x) z(x) e^{-A(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z'(x) e^{-A(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}, \forall x \in I, z(x) = C$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) e^{A(x)} = C$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) = C e^{-A(x)}$$

□

Exercice 16 pour 14h00

$y' + a(x) y = 0$: Equation diff. lin. homogène

$a : I \to \mathbb{K}$ fonction continue

Inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ fonction dérivable

Si A est primitive de a, les solutions sont :

$$y(x) = C e^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{K}$$

16

1) $y' + 3y = 0$ $\quad a(x) = 3$ $\quad A(x) = 3x$

Solutions : $y(x) = C e^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$

2) $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 0$ $\quad a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $\quad A(x) = \ln(1+x^2)$

Solutions : $y(x) = C e^{-\ln(1+x^2)}$, $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{C}{1+x^2} \text{ , } C \in \mathbb{R}$$

3) $y' + \frac{1}{x} y = 0$ sur $]0 ; +\infty[$ $(= I)$

$$a(x) = \frac{1}{x} \qquad A(x) = \ln x$$

Ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ y : x \mapsto C e^{-\ln x} = \frac{C}{x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$$

4) $y' + \tan x \, y = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$$a(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = - \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$A(x) = - \ln(\cos x)$$

Solutions : $y(x) = C e^{\ln(\cos x)}$, $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = C \cos x \text{ , } C \in \mathbb{R}$$

5) $y' + x y = 0$ $\quad a(x) = x$ $\quad A(x) = \frac{x^2}{2}$

$$y : x \mapsto C e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ ; } C \in \mathbb{R}$$

COURS

2) **Equation avec second membre**

Soit à résoudre $y' + a(x) y = b(x)$ (E)

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont continues sur l'intervalle I.

Théorème de structure de l'ensemble des solutions

On note (E_H) $y' + a(x)\,y = 0$ l'équation homogène associée à (E).

Si $y_p \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ est une solution, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ y = y_p + y_h \;\middle|\; y_h \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}) \text{ solution de } (E_H) \right\}$$

Exemple : $y' + 2y = x^2$ (E) (à résoudre sur $\mathbb{R}$ ($\to I$))

$y(x) = C \to y' + 2y = 2C$

$y(x) = a x^3 \to y' + 2y = 3ax^2 + 2ax^3$

$y(x) = ax^2 \to y' + 2y = 2ax + 2ax^2$

(E_H) $y' + 2y = 0$

$y' = -2y$

$a(x) = 2 \quad A(x) = 2x$

$y(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$

$y_p(x) = ax^2 + bx + c$ (On cherche une solution sous cette forme)

$y_p(x) = 2ax + b$

y_p est une solution si on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (2a-1)x^2 + (2a+2b)x + b + 2c = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \\ 2a+2b=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{cases}$

$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

est une solution.

Ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x} \end{array} \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 17 ⓐ $y' - 2y = e^{3x}$

Equation homogène associée $y' - 2y = 0$

$y' = 2y$

$a(x) = -2$, $A(x) = -2x$ | $y_H(x) = Ce^{2x}$

On cherche sous la forme $y_p(x) = ae^{3x}$, $a \in \mathbb{R}$

y_p est solution ssi :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 3ae^{3x} - 2ae^{3x} = e^{3x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ ae^{3x} = e^{3x}$

Pour $a = 1$, $y_p(x) = e^{3x}$

Solution générale : $y(x) = e^{3x} + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

(c) $y' + 2y = x^2 + 1$

Cherchons sous la forme → $\begin{cases} y_p(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R} \\ y_p'(x) = 2ax + b \end{cases}$

y_p est solution s.s.i :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 + 1$

devant x^2 → $2a = 1$

devant x → $2a + 2b = 0$

cte → $b + 2c = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 3/4 \end{cases}$

$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ est une solution

Equation homogène associée : $y' + 2y = 0$

$y' + a(x)y = 0$ → on cherche une primitive de $a(x)$ qu'on note $A(x)$

$a(x) = 2$

$A(x) = 2x$

$y_H(x) = Ce^{-2x}$.

Solution générale :

$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$

(d) $y' - y = \sin x$

Si $y_p(x) = a \sin x$,

$y_p'(x) - y_p(x) = a\cos x - a\sin x$ (ne marche pas)

Si $y_p(x) = a\sin x + b\cos x$

$y_p'(x) = a\cos x - b\sin x$

donc y_p est une solution de l'équation ssi :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$a\cos x - b\sin x - a\sin x - b\cos x = \sin x$

$(a-b)\cos x - (a+b)\sin x = \sin x$

$a-b \to 0$; $-(a+b) \to 1$

$\begin{cases} a-b=0 \\ -(a+b)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ -2b=1 \end{cases}$

Pour $a=b=-\frac{1}{2}$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

Solutions de $y'-y=\sin x$:

$y(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$

Méthode alternative :

$y' - y = \sin x$

→ On cherche $z(x)$ tq :

(E_1) $z' - z = e^{ix}$ (Puis on prendra $y(x) = \mathrm{Im}(z(x))$)

$z(x) = Ce^{ix}$ où $C \in \mathbb{C}$.

y est solution de $(E_{\mathbb{C}})$ ssi :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $iCe^{ix} - Ce^{ix} = e^{ix}$

$C(i-1)e^{ix} = e^{ix}$

pour $C = \frac{1}{i-1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$y(x) = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{ix}\right)$

$= \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(\cos x + i \sin x)\right)$

$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

(e) $y' - y = e^x + x \quad (E_{(e)})$

y_1 tq $y_1' - y_1 = x$ (E_1) ?

y_2 tq $y_2' - y_2 = e^x$ (E_2) ??

$y_1 = ax + b$ est solution :

$a - ax - b = x$

$a = -1$ et $b = -1$ convient.

$y_1(x) = -x - 1$ est solution de (E_1)

$y_2(x) = \lambda x e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$y_2'(x) = \lambda e^x + \lambda x e^x = \lambda(1+x)e^x$

y_2 est solution de (E_2) s.s.i :

$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^x = e^x$ donc $\lambda = 1$ $y_2(x) = xe^x$

$y_p = y_1 + y_2$ est une solution de $(E_{(e)})$

$y_p(x) = -x - 1 + xe^x$

(E_H) $y' - y = 0 \to y_H(x) = Ce^x, C \in \mathbb{R}$

Solution de $(E_{(e)})$:

$y(x) = -x - 1 + xe^x + Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$.

COURS 3) Variation de la constante

Soit à résoudre $y' + a(x)y = b(x)$ (E)

(mêmes hypothèses et notations qu'au 2))

En notant A une primitive de a, on sait que $y_h(x) = Ce^{-A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, est la solution de $y' + ay = 0$.

On cherche une solution de (E) sous la forme :

(1) $y(x) = C(x)e^{-A(x)}$ où $C \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$

$y'(x) = C'(x)e^{-A(x)} + C(x)(-A'(x))e^{-A(x)}$

(2) $y'(x) = C'(x)e^{-A(x)} - a(x)C(x)e^{-A(x)}$

(2) + a(1) : $y'(x) + a(x)y(x) = C'(x)e^{-A(x)}$

y est une solution de $y' + ay = b$ s.s.i :

$\forall x \in I$, $C'(x) e^{-A(x)} = b(x)$

$\Leftrightarrow C'(x) = b(x) e^{A(x)}$

On cherche une primitive C de la fonction $x \mapsto b(x) e^{A(x)}$ et alors $y(x) = C(x) e^{-A(x)}$ est solution de $y' + a y = b$.

Exemple : $y' + 2y = e^{-2x}$ (E)

Equation homogène :

(E_H) $y' + 2y = 0$ $\quad a(x) = 2$, $A(x) = 2x$

Solution de (E_H) : $y(x) = C e^{-2x}$

On cherche $y(x) = C(x) e^{-2x}$ qui soit une solution de (E) :

$y'(x) + 2y(x) = e^{-2x}$

$C'(x) e^{-2x} + C(x)(-2) e^{-2x} + 2 C(x) e^{-2x} = e^{-2x}$

$C'(x) e^{-2x} = e^{-2x}$

$C'(x) = 1$

Si $C(x) = x$, $y(x) = x e^{-2x}$

est une solution de (E) donc

l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \begin{array}{l} y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y : x \mapsto x e^{-2x} + C e^{-2x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$$

EXERCICE 18

a) $x y' + 2y = x^2$ sur $I =]0 ; +\infty[$

$$y' + \frac{2}{x} y = x$$

$$a(x) = \frac{2}{x} \qquad A(x) = 2 \ln x$$

Solutions de $y' + \frac{2}{x} y = 0$: $y_H(x) = C e^{-2 \ln x}$

$$y_H(x) = \frac{C}{x^2}$$

On cherche une solution de l'équation avec second membre sous la forme :

$$y(x) = \frac{C(x)}{x^2} = C(x) \times \frac{1}{x^2}$$

On a : $y'(x) = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}$

et on a $y'(x) + \frac{2}{x} y(x) = \frac{C'(x)}{x^2}$

y est solution de l'équation $1°$:

$$\frac{C'(x)}{x^2} = x \iff C'(x) = x^3$$

$C(x) = \frac{x^4}{4}$ convient et :

$$y_{p}(x) = \frac{\frac{x^4}{4}}{x^2} = \frac{x^2}{4}$$

est une solution.

Ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y : x \mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$$

(E) $(1+x^2)y' + 2xy = 1$

$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{1}{1+x^2}$

$a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$A(x) = \ln(1+x^2)$

$y_H(x) = C e^{-\ln(1+x^2)}$

$y_H(x) = \frac{C}{1+x^2}$

y

$C'(x) = e^{A(x)} b(x)$

$y' + \ldots y = \ldots$

$y(x) = \frac{C(x)}{1+x^2}$ est solution $\Delta°$: $C'(x) = (1+x^2) \times \frac{1}{1+x^2}$

$C'(x) = 1$

$y(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Solution générale $y(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$, $C \in \mathbb{R}$

Alexandre $y' + 7y = \cos(5x)$

$\rightarrow y_p = A\cos(5x) + B\sin(5x)$

On trouve A, B tq y_p est solution

$y(x) = Ce^{-7x} + A\cos(5x) + B\sin($

$C'(x)e^{-A(x)} = b(x)$ $\quad C'(x) = e^{A(x)}$

$y(x) = C(x)e^{-A(x)}$