

Cor. 4.4 : Notons $T(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$ et $U(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$.

T est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, T'(x) = S(x)$.

Par ailleurs $T'(x) = \mathcal{Im}(U'(x))$. Or, pour $x \neq 0[2\pi]$:

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{k=0}^n e^{ikx} \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})}{e^{i\frac{n+1}{2}x} (e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x})} \\ &= e^{i\frac{n}{2}x} \frac{-2i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } T(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{et } S(x) = T'(x) &= \frac{n \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \right]}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &+ \frac{\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \right] \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

ou encore

$$S(x) = \frac{n \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Si } x = 0[2\pi], S(x) = \frac{n(n+1)}{2}.$$