

Techniques de calcul différentiel

I. Inégalités dans $\mathbb{R}$

I.1. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est, comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni d'une relation d'ordre totale $\leq$. Cette relation est *compatible avec les opérations du corps* $(\mathbb{R}, +, \times)$:



Définition 5.1 (Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations)

La relation d'ordre $\leq$ vérifie les propriétés suivantes, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- compatibilité avec l'addition : $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- compatibilité avec la multiplication : $(x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \Rightarrow x \times z \leq y \times z$.

Elle est dite *compatible avec les opérations du corps* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Ex. 5.1 Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cor. 5.1

La preuve se fait par l'absurde.

Supposons qu'une telle relation existe. La relation étant totale, ou bien $0 \leq i$ ou bien $i \leq 0$.

On traite le premier cas, le second étant similaire.

Si $0 \leq i$, la relation étant compatible avec l'addition, alors $-i \leq i - i = 0$. De ces deux relations on déduit par transitivité que $-i \leq i$. Comme $0 \leq i$, par compatibilité avec la multiplication, on déduit d'abord que $-i^2 \leq i^2$ c'est-à-dire que $1 \leq -1$ (ce qui est contre-intuitif mais pas encore contradictoire) puis que $i \leq -i$ (en multipliant à nouveau les deux membres de l'inégalité par $i \geq 0$).

Par antisymétrie, on conclut que $i = -i$ ce qui est absurde.



Remarque

L'exemple précédent montre que des notions comme celle de croissance d'une fonction ne sont pas définies pour les fonctions à valeurs complexes. Il s'ensuit que certains théorèmes se généralisent mal - ou pas du tout - à de telles fonctions.

Il convient donc de bien comprendre d'emblée qu'il existe une différence fondamentale entre $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, même si certaines généralisations sont possibles.

Propriété 5.2

Si x et y sont deux réels, alors

$$x \leq y \Leftrightarrow -x \geq -y \quad xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \text{ et } y \text{ ont même signe}) \quad x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \text{ ont même signe}$$

$$0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad 0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$$

Démonstration

Ces propriétés se démontrent dans l'ordre :

- Supposons $x \leq y$, alors par compatibilité avec l'addition, en ajoutant $-x - y$ aux deux membres de l'inégalité, on a $x - x - y \leq y - x - y \Leftrightarrow -x \geq -y$. La réciproque se fait de même.
- Supposons $x \neq 0$. $1 = x \times \frac{1}{x} > 0$. On conclut par compatibilité avec la multiplication en divisant par x ou $-x$ suivant le signe de x .
- Supposons que $0 < x \leq y$. Alors, par compatibilité avec la multiplication, $0 < xy$. L'inverse de xy est donc strictement positif. Par compatibilité avec la multiplication, on en déduit que $0 < \frac{x}{xy} \leq \frac{y}{xy}$ donc que $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.
- Les autres démonstrations sont similaires.

Remarque

On peut reformuler les propriétés

$$x \leq y \Leftrightarrow -x \geq -y \quad 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad 0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$$

de la façon suivante :

- $x \in \mathbb{R} \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$;
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Attention cependant :

- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ **n'est pas décroissante** sur $\mathbb{R}_*$ puisque $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}_-$.

I.2. Bornes et extremums d'une partie

Les notions de majorant, minorant, bornes, maximum, minimum et extremums vues pour les entiers au chapitre 2 se généralisent à $\mathbb{R}$ puisqu'il est totalement ordonné. Notamment :

Proposition 5.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Ex. 5.2 Quels sont les majorants et les minorants de $\mathbb{R}_+$? de $\mathbb{R}_-$?

Cor. 5.2

Tout nombre positif est un majorant de $\mathbb{R}_-$ et tout nombre négatif est un minorant de $\mathbb{R}_+$.
En revanche, $\mathbb{R}_+$ n'est pas majorée et $\mathbb{R}_-$ n'est pas minorée.

Ex. 5.3 $[0; 1[$ admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Mêmes questions pour $\mathbb{R}_-$.

Cor. 5.3

$\min [0; 1[= 0$ mais $[0; 1[$ n'admet pas de plus grand élément. De même, $\min \mathbb{R}_-$ n'existe pas puisque $\mathbb{R}_-$ n'admet pas de minorant mais $\max \mathbb{R}_- = 0$.

Ex. 5.4 Soit $E = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, y = x + \frac{1}{x} \right\}$.

E est-il minoré ? Possède-t-il un minimum ?

Cor. 5.4

- E est minoré par 0 puisque tout élément de E est somme de deux réels positifs.
- En prenant $x = 1$, on montre que $y = 1 + 1 = 2 \in E$. Montrons qu'il s'agit aussi d'un minorant de E . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x + \frac{1}{x} - 2 = x - 1 + \frac{1 - x}{x} = (x - 1) \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0$.
Donc E possède un plus petit élément et $\min E = 2$.

I.3. Valeur absolue



Définition 5.4

| Pour tout réel x , on appelle **valeur absolue de x** le maximum de x et de $-x$.



Notation

| On note $|x| = \max\{x; -x\}$ la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$.

Les propriétés de la proposition suivante sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 5.5 (Propriétés élémentaires de la valeur absolue)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ • $x > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ • $- x \leq x \leq x$ • $x - y = r \Leftrightarrow (x = y - r \text{ ou } x = y + r)$ • $x = x \Leftrightarrow x \geq 0$ • $xy = x \times y$ • si $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x ^n$ • $x \leq r \Leftrightarrow (-r \leq x \leq r)$ | <ul style="list-style-type: none"> • $x < r \Leftrightarrow (-r < x < r)$ • $x \geq r \Leftrightarrow (x \geq r \text{ ou } x \leq -r)$ • $x = r \Leftrightarrow (x = r \text{ ou } x = -r)$ • $x - y \leq r \Leftrightarrow (y - r \leq x \leq y + r)$ • $x = -x \Leftrightarrow x \leq 0$ • si $x \neq 0$, $\left \frac{y}{x} \right = \frac{ y }{ x }$ |
|--|---|

Proposition 5.6 (Inégalités triangulaires)

Soit x et y des réels. Alors

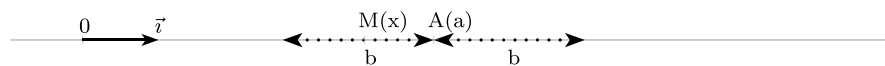
$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Démonstration

En notant $r = |x| + |y| \geq 0$, comme $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$, on a $-r \leq x + y \leq r$, d'où $|x + y| \leq r$ qui est la première inégalité. On applique cette inégalité à $x = (x - y) + y$, ce qui donne $|x| \leq |x - y| + |y|$, soit $|x| - |y| \leq |x - y|$. Un argument symétrique permet d'obtenir $|y| - |x| \leq |x - y|$ soit $-|x - y| \leq |x| - |y|$, d'où la seconde inégalité.

Remarque

- Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$. De plus, si $r \geq 0$, alors
 $|x| \leq r \Leftrightarrow x^2 \leq r^2$ et
 $|x| \geq r \Leftrightarrow x^2 \geq r^2$.
- On rapporte la droite réelle à un repère $(O; \vec{i})$. Pour deux réels x et y , la valeur absolue $|y - x|$ s'interprète géométriquement comme la distance entre les points $M(x)$ et $N(y)$: $MN = |y - x|$. Étant donnés deux réels a et b , l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leq b$ d'inconnue x s'interprète donc géométriquement comme l'ensemble des points $M(x)$ dont la distance au point $A(a)$ est inférieure à b .



Ex. 5.5 Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1) (x + 5)(2x - 1) \leq (3x - 7)(2x - 1) \quad 2) \frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

Cor. 5.5

$$1) (x + 5)(2x - 1) \leq (3x - 7)(2x - 1) \Leftrightarrow (2x - 1)(3x - 7 - x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 6) \geq 0$$

Un tableau de signes permet de conclure : l'ensemble des solutions est $S =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [6; +\infty[$.

2) Pour que l'inéquation ait un sens il faut que $x \geq 0$ et $x \neq 1$.

Sur $I = [0; 1[\cup]1; +\infty[$, l'inéquation est équivalente à $\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 1} - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + x} - x + 1}{x - 1} < 0.$$

On étudie le signe du dénominateur et du numérateur :

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$\sqrt{x^2 + x} - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} + 1 > x \Leftrightarrow x^2 + x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1 > x^2$ car la fonction carrée est bijective croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Le numérateur est donc toujours positif sur I .

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inégalité est donc $[0; 1[$.

Ex. 5.6 Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

Cor. 5.6

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2|x| = |2x| = |x+y+x-y| \leq |x+y| + |x-y|$ d'après la première inégalité triangulaire. De même, $2|y| = |y+x+y-x| \leq |x+y| + |x-y|$. Donc $2|x| + 2|y| \leq 2|x+y| + 2|x-y|$ et on conclut en divisant par 2.

Ex. 5.7 Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle $x : \left| x + \frac{1}{x} \right| > 3$.

Cor. 5.7

Le membre de gauche est défini pour x non nul. Sur $\mathbb{R}^*$, l'inéquation équivaut à (la fonction carrée étant bijective croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$)

$$(x^2 + 1)^2 > 9x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 1) > 0.$$

On étudie le signe de chacun des trinômes : les racines du premier sont $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(toutes deux négatives) et celles du second sont $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (toutes deux positives). Un trinôme du second degré est du signe de son coefficient dominant à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines. Pour que les deux trinômes soient non nuls et de même signe,

il est donc nécessaire et suffisant que x appartienne à l'un des intervalles $\left] -\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right]$, $\left] \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; 0 \right[$, $\left] 0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right[$ ou $\left] \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$.

Ex. 5.8 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité $|x + 1| + |x - 3| < 6$.

Ex. 5.9 (Cor.) [*] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$

I.4. Partie entière d'un nombre réel

**Définition 5.7**

Pour tout réel x , on appelle **partie entière de x** le plus grand entier $N \in \mathbb{Z}$ inférieur ou égal à x .

Cet entier existe toujours d'après la propriété 2.5 (propriété fondamentale des entiers).

**Notation**

Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .

Représentation graphique de $x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$