

Techniques de calcul différentiel

I. Généralités

Ex. 5.1

- Montrer que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
- Montrer que $\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.
- Montrer que $\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, 3ab + 3bc + 3ac \leq (a + b + c)^2$.

Ex. 5.2 $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels.

- Montrer que si $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ alors $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i = 1$.
- Est-il possible que $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 > n$?
- Trouver un exemple où $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 < n$.

Ex. 5.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :

- a. $|x + 1| \leq 1$ b. $|x - 1| \leq |x - 2|$ c. $|2x - 1| - |x + 1| < |3x + 5|$

Ex. 5.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :

- a. $(y + 1)(y + 3) > (y + 1)^3$ b. $(y + 2)(y + 3)y \leq 4y + 8$
 c. $\lambda \in \mathbb{R}$ donné, $(\lambda^2 - 1)y^2 + 2\lambda y + 1 \geq 0$

Ex. 5.5 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x , en effectuant un **changement d'inconnue** :

- (A) : $2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0$ (B) : $\cos(3x) + 2\cos(x) \geq 0$ où $x \in]-\pi; \pi]$

Ex. 5.6 On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique, admettant 2 et 3 comme période. Montrer que f est 1-périodique.

II. Études de fonctions

Ex. 5.7

- Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
- Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.
- Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1 et tout réel x **non nul et supérieur ou égal à -1** , on a :

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

Ex. 5.8 (Cor.) Étude et représentation graphique de

$$f : x \mapsto \left| x - \sqrt{1 - x^2} \right|$$

Ex. 5.9 Étudier la fonction $P : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2$.

Montrer que $P(x) = 0$ possède exactement deux solutions réelles, dont une (que l'on ne cherchera pas à obtenir) dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

Ex. 5.10 Étudier la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 5)$.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution réelle x_0 (que l'on ne cherchera pas à obtenir).

Montrer plus précisément que $x_0 \in [1; 2]$.

Ex. 5.11 Ensemble de définition, parité, étude et représentation graphique de $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

On montrera que h est bijective de son ensemble de définition sur un intervalle à préciser et on donnera une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 5.12 (Cor.) **[**]** Soit $0 < a \leq b$.

On pose $f : x \in]0; +\infty[\mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Étudier la monotonie de f . En déduire l'inégalité

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$$

Ex. 5.13

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[$, on a les inégalités

$$\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$$

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{(p+1)n}$. Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex. 5.14 Sinus cardinal **[**]** On appelle **sinus cardinal** et on note sinc la fonction définie par

$$\text{sinc} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \\ 0 & \mapsto 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
2. Déduire de la question précédente que sinc est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Quel est l'ensemble de dérivabilité **à priori** de sinc ?
4. Montrer que sinc est dérivable en 0. Que peut-on en déduire concernant l'ensemble sur lequel sinc est dérivable ?
5. Montrer que sinc possède un maximum que l'on précisera.
6. Montrer que sinc' change de signe une infinité de fois.
7. Tracer une représentation graphique rapide de sinc (on ne cherchera pas à préciser les intervalles sur lesquels sinc est monotone).
8. Montrer que sinc' est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrections

Cor. 5.8 : $f(x)$ est définie si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$. Donc f est définie sur $[-1; 1]$.

Étudions le signe de $x - \sqrt{1-x^2}$:

$x - \sqrt{1-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1-x^2}$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in [-1; 0]$. Considérons l'autre cas possible à savoir $x \in [0; 1]$. Dans ce cas, l'inégalité porte sur deux quantités positives, la fonction carré est bijective croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ donc

$x \leq \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 \leq 1-x^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. En résumé :

- si $x \in \left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$. Sur cet intervalle, f est dérivable

si et seulement si $1 - x^2 \neq 0$. Donc f est dérivable sur $\left]-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. On a alors :

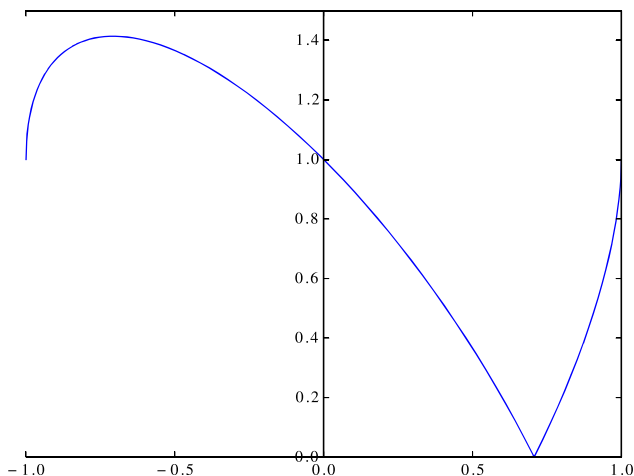
$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 1 = \frac{-x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. On étudie à nouveau le signe de $f'(x)$ qui est celui de son numérateur.

Or on remarque que $-x - \sqrt{1-x^2} = (-x) - \sqrt{1-(-x)^2} = u - \sqrt{1-u^2}$ en posant $u = -x$. L'étude du signe de cette dernière expression a déjà été faite et on conclut que

$f'(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

- de même, si $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ et une étude similaire conduit à prouver que f est strictement croissante sur cet intervalle.

Valeurs de x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Signe de $f'(x)$		+	-	+
Variations de $f(x)$	1	$\nearrow$	$\searrow$	1



Cor. 5.12 :

- Commençons par justifier que f est bien définie sur $]0; +\infty[$.
Soit $x > 0$. $0 < a \leq b$ donc $0 < ax \leq bx$ et par conséquent $1 < 1 + ax \leq 1 + bx$.

Donc $\ln(1 + ax)$ et $\ln(1 + bx)$ sont bien définies et strictement positives.

Donc $f(x) = \frac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}$ est bien définie (son numérateur et son dénominateurs sont définis, et son dénominateur ne s'annule pas).

De plus, cette étude montre aussi que $0 < f(x) \leq 1$.

f est aussi dérivable comme quotient de fonctions dérivables et, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1 + bx) - \frac{b}{1+bx} \ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)^2} \\ &= \frac{a(1 + bx) \ln(1 + bx) - b(1 + ax) \ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)^2(1 + ax)(1 + bx)} \end{aligned}$$

L'étude précédente prouve que le dénominateur de cette expression est

strictement positif, $f'(x)$ est donc du signe de son numérateur.

- Étudions donc le signe de $a(1 + bx) \ln(1 + bx) - b(1 + ax) \ln(1 + ax)$.

$$\begin{aligned} &a(1 + bx) \ln(1 + bx) - b(1 + ax) \ln(1 + ax) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &a(1 + bx) \ln(1 + bx) \geq b(1 + ax) \ln(1 + ax) \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{1}{bx} + 1\right) \ln(1 + bx) \geq \left(\frac{1}{ax} + 1\right) \ln(1 + ax) \\ \times \frac{1}{abx} & \end{aligned}$$

Montrons que cette dernière inégalité est toujours vérifiée : comme $bx \geq ax > 0$, il suffit pour cela de démontrer que la fonction

$$g : u > 0 \mapsto \left(\frac{1}{u} + 1\right) \ln(1 + u) = \frac{(u + 1) \ln(u + 1)}{u} \text{ est croissante.}$$

$$\text{Or, } g'(u) = \frac{(\ln(u + 1) + 1)u - (u + 1) \ln(u + 1)}{u^2} = \frac{u - \ln(u + 1)}{u^2} \geq 0$$

car $\forall u \in]-1; +\infty[, \ln(1 + u) \leq u$.

Donc g est bien croissante, et par conséquent, $g(bx) \geq g(ax)$.

D'après ce qui précède, ceci prouve que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) \geq 0$.

- Nous avons donc montré que f est croissante.

Il s'agit d'en déduire maintenant que $\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$.

Par hypothèse, $0 < a \leq b$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc aussi

$$0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

Or f est croissante, donc $f\left(\frac{1}{b}\right) \leq f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Ceci achève la démonstration puisque :

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln(1 + 1)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln 2}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\ln(1 + 1)}{\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)}$$

et qu'en remplaçant dans l'inégalité précédente on obtient, comme l'énoncé l'affirmait,

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$$