

# Nombres complexes : équations et géométrie

## I. Utilisations en géométrie

Les formules concernant le module et l'argument des nombres complexes permettent une grande variété d'applications géométriques. Nous en donnons ici quelques exemples.

On rappelle que le plan est rapporté à un repère  $(0; \vec{i}, \vec{j})$  **orthonormal direct** et que l'affixe d'un point  $M(x; y)$  dans ce repère est le complexe  $z = x + iy$ .

### I.1. Angle de vecteurs

#### Proposition 6.1

Étant donnés deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  d'affixes respectives  $z$  et  $z'$  on a  
 $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \text{Arg}(\bar{z}z') [2\pi]$   
 où  $(\vec{u}; \vec{v})$  désigne l'angle orienté entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

#### Démonstration

#### Corollaire 6.2 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs  $\vec{u}(z)$  et  $\vec{v}(z')$  sont colinéaires si et seulement si  $\bar{z}z' \in \mathbb{R}$ .

#### Corollaire 6.3 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs  $\vec{u}(z)$  et  $\vec{v}(z')$  sont orthogonaux si et seulement si  $\bar{z}z' \in i\mathbb{R}$ .

#### Corollaire 6.4 (Points alignés)

Trois points  $A(z_A)$ ,  $B(z_B)$  et  $C(z_C)$  sont alignés si et seulement si  $(\bar{z}_A - \bar{z}_B)(z_A - z_C) \in \mathbb{R}$ .

**Ex. 6.1** Quelle est la nature géométrique des points  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $|z - i| = |z - 1|$  ?

**Ex. 6.2** On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 En utilisant les nombres complexes, donner une équation de la droite passant par  $A(3; -1)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1; 2)$ .

**Ex. 6.3** Nature géométrique de l'ensemble  $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C}, |z - 2 + i| = 3\}$  ?

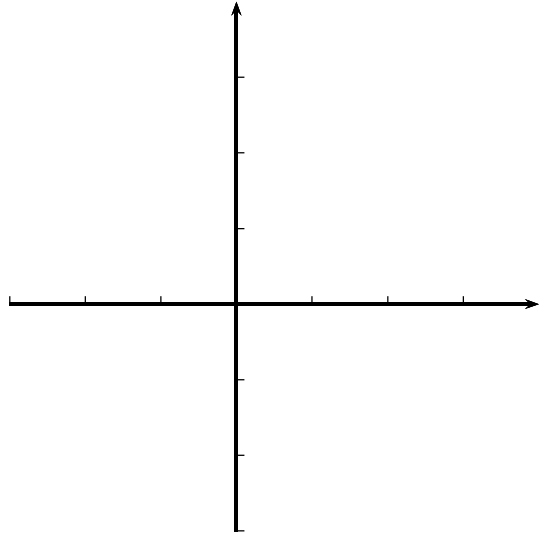
### I.2. Transformations du plan complexe

On identifie les points du plan et leur affixe, et les vecteurs du plan et leur affixe.

Autrement dit, pour  $z \in \mathbb{C}$

- « le point  $z$  du plan complexe » signifie « le point  $M$  du plan d'affixe  $z$  » ;

- « le vecteur  $z$  du plan complexe » signifie « le vecteur  $\vec{v}$  du plan d'affixe  $z$  ».
- Soit  $c \in \mathbb{C}$ . La transformation  $z \mapsto z + c$  du plan complexe est  
.....  
.....
- La transformation  $z \mapsto \bar{z}$  du plan complexe est  
.....  
.....
- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . La transformation  $z \mapsto \lambda z$  du plan complexe est  
.....  
.....
- Soit  $u \in \mathbb{U}$ . La transformation  $z \mapsto uz$  est  
.....  
.....



**Ex. 6.4 (Cor.)** Soient  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  trois points du plan complexe.

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $ABC$  soit un triangle équilatéral **direct**.
- 2) Montrer que cette condition est équivalente à  $a + jb + j^2c = 0$  avec  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .
- 3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que  $ABC$  soit un triangle équilatéral.
- 4) Existe-t-il des triangles équilatéraux à coordonnées entières ?  
[**Indication** : on admettra que  $\sqrt{3}$  est irrationnel.]

## II. Utilisations en algèbre

### II.1. Racine réelle $n$ -ième d'un réel positif

#### Proposition 6.5

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$  est bijective.

#### Démonstration



#### Définition 6.6 (Fonction racine $n$ -ième)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$$

est la bijection réciproque de  $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$ .

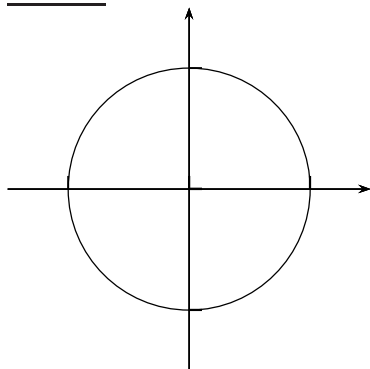
II.2. Racines complexes  $n$ -ièmes de l'unité**Théorème 6.7 (Racines  $n$ -ièmes de l'unité)**

Quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $z \in \mathbb{C}, z^n = 1$  possède exactement  $n$  racine(s), toutes de module 1. L'ensemble des solutions de cette équation est  $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} \subset \mathbb{U}$ .

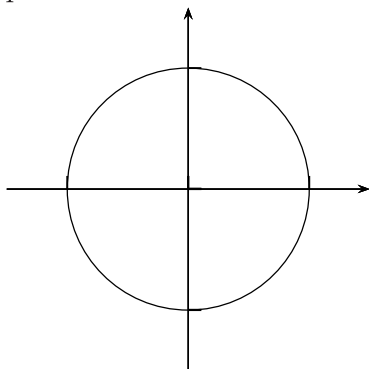
**Démonstration****Important !**

- Nous venons de voir que  $n\theta \equiv 0 [2\pi] \Leftrightarrow \theta \dots\dots\dots$
- D'après le théorème précédent, l'application  $\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{cases}$  *n'est pas une bijection* si  $n > 1$  (puisque 1 a  $n$  antécédents).  
En conséquence, elle *n'admet pas de bijection réciproque*.  
La fonction  $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$  est *définie uniquement sur*  $\mathbb{R}_+$ .

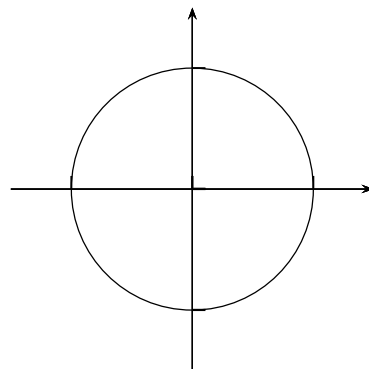
**Ex. 6.5** Placer les racines complexes  $n$ -ièmes de l'unité dans les cas suivants



Racines cubiques :  $n = 3$



Racines quatrièmes :  $n = 4$



Racines sixièmes :  $n = 6$

**Méthode**

Étant donnés  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $c \in \mathbb{C}^*$ , l'équation  $z^n = c$  a exactement  $n$  solutions.

Pour la résoudre, on procède de la façon suivante

- on écrit  $c$  sous forme trigonométrique :  $\exists! \rho \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma \in \mathbb{R}, c = \rho e^{i\gamma}$  ;
- on en déduit  $|z| : |z^n| = \dots\dots\dots$
- on termine en explicitant les différentes valeurs possibles pour  $\theta = \arg(z)$  :  
 $z^n = c \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

**Ex. 6.6** Résoudre l'équation  $z^3 = 1 + i$

**Cor. 6.6**

### II.3. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

#### Théorème 6.8

Étant donnés  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  **trois nombres complexes**, l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  et de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  possède :

- une solution **double**  $z_0 = \frac{-b}{2a}$  si  $\Delta = 0$  ;
- deux solutions distinctes  $z_{\pm} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$  si  $\Delta = \delta^2 \neq 0$ .

#### Démonstration



#### Méthode

Pour résoudre une équation du second degré à **coefficients complexes** :

- on calcule le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  ;
- si  $\Delta = 0$ , on a immédiatement la solution double ;
- si  $\Delta \neq 0$ , on cherche la partie réelle et la partie imaginaire de l'un des deux complexes  $\delta$  vérifiant  $\delta^2 = \Delta$  en résolvant le système 
$$\begin{cases} \delta^2 &= \Delta \\ |\delta|^2 &= |\Delta| \end{cases}$$
 c'est-à-dire en adaptant au cas  $n = 2$  la méthode de résolution des équations du type  $z^n = c$ .

**Ex. 6.7** Résoudre sur  $\mathbb{C}$  l'équation  $2z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$ .

#### Cor. 6.7

### II.4. Relations coefficients-racines

#### Théorème 6.9

Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  sont les solutions de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  **trois nombres complexes** alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2), \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

#### Démonstration

### II.5. Factorisation d'un polynôme

**Définition 6.10 (Polynôme)**

On appelle **polynôme** à coefficients réels (ou complexes) toute expression  $P(x)$  du type

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

où  $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est une famille de nombres réels (ou complexes).

Le plus grand entier  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  tel que  $a_k \neq 0$  est appelé **degré du polynôme**  $P(x)$ .

Le degré du polynôme nul ( $P = 0$ ) est par convention égal à  $-\infty$ .

Souvent, la variable  $x$  n'est pas écrite : on parle simplement du **polynôme**  $P$ .

On dit que  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une **racine** ou un **zéro** de  $P$  si et seulement si  $P(\alpha) = 0$ .

**Théorème 6.11**

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels ou complexes et  $\alpha$  une racine (réelle ou complexe) de  $P$ .

Alors il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = (X - \alpha)Q$ .

**Démonstration****Méthode : Résolution des équations polynomiales de degré supérieur à 3**

Le théorème précédent permet d'affirmer que si on connaît une solution  $a$  d'une équation polynomiale

$$P(x) = 0$$

alors on peut réécrire cette équation  $(x - a)Q(x) = 0$ .

Ceci conduit à la méthode suivante : pour résoudre une équation polynomiale de degré supérieur à 3

- on cherche une « racine évidente »  $a$  de l'équation  $P(x) = 0$  ;
- on factorise  $P$  de sorte à ce que l'équation devient  $(x - a)Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ Q(x) = 0 \end{cases}$
- on recommence le même procédé sur l'équation  $Q(x) = 0$ .

**Ex. 6.8** Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :  $(E) \quad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ .

**II.6. Propriétés de l'exponentielle complexe**

Nous avons défini page 27 l'exponentielle complexe par  $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i\operatorname{Im}(z)}$ .

En voici quelques propriétés :

**Propriété 6.12 (Propriétés de l'exponentielle complexe)**

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$  :

- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi$   
 $\Leftrightarrow z \equiv 0 [2i\pi]$
- $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z' [2i\pi]$

### Propriété 6.13

$\forall z \in \mathbb{C}$ ,

- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$  ;
- $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi]$ .

### Démonstration



### Important !

L'équation  $e^z = c \in \mathbb{C}^*$  possède une infinité de solutions complexes, la partie imaginaire de  $z$  étant définie à  $2\pi$  près.



### Méthode : Équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$

La propriété précédente donne une méthode de résolution des équations du type  $e^z = c \in \mathbb{C}^*$  : en effet, résoudre l'équation revient à résoudre le système

$$\begin{cases} |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = |c| \\ \arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z) \equiv \arg(c) [2\pi] \end{cases}$$

**Ex. 6.9** Résoudre les équations d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$(E_1) : e^z = -7 \quad (E_2) : e^z = 5 - 12i$$

### Cor. 6.9

## III. Correction des exercices

**Cor. 6.4 :**

- 1)  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $C$  est l'image de  $B$  dans la rotation de centre  $A$  d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Donc  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ .

- 2) À partir de l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} c - a &= e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \Leftrightarrow (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)a - e^{i\frac{\pi}{3}}b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0 \end{aligned}$$

- 3)  $ABC$  est un triangle équilatéral si et seulement si c'est un triangle équilatéral **direct** OU **indirect**. D'où :

$$ABC \text{ est un triangle équilatéral} \Leftrightarrow (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) = 0.$$

En développant on obtient

$$ABC \text{ est un triangle équilatéral} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

- 4) Traitons uniquement le cas direct, le cas indirect étant obtenu par permutation de deux sommets du triangle.

Supposons que  $b$  et  $c$  soient à parties réelles et imaginaires entières, alors

$$a = -jb - j^2c = \frac{-\mathcal{R}e(b) + \sqrt{3}\mathcal{I}m(b) - \mathcal{R}e(c) - \sqrt{3}\mathcal{I}m(c)}{+i \frac{\mathcal{I}m(b) - \sqrt{3}\mathcal{R}e(b) + \mathcal{I}m(c) + \sqrt{3}\mathcal{R}e(c)}{2}}$$

Donc, pour que  $\mathcal{R}e(a)$  soit entier, il est nécessaire que  $\mathcal{I}m(b) = \mathcal{I}m(c)$  (car  $\sqrt{3}$  est irrationnel).

De même, pour que  $\mathcal{I}m(a)$  soit entier, il est nécessaire que  $\mathcal{R}e(b) = \mathcal{R}e(c)$ .

Donc les seuls triangles équilatéraux à coordonnées entières sont ceux réduits à un point !