

# Partie entière

**Ex. 1.1** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  
 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ .

En déduire la valeur de  $\left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$ .

**Ex. 1.2** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$ .

**Ex. 1.3** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Calculer  $\left\lfloor \sqrt{n^2 + 3n + 4} \right\rfloor$ .

**Ex. 1.4** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ .

**Ex. 1.5**

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\lfloor x \rfloor$  est *le plus petit entier strictement supérieur à*  $x - 1$ .
2. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :  
 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :  $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ .
4. Soit  $u$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = n - u_n \end{cases}$ .  
 Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$  (on demande une formule explicite).

**Ex. 1.6** Soit  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor$  et  $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - \lfloor x \rfloor$ .

1. Montrer que  $g$  est 1-périodique.
2. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$ .