Maths - DM n°2 - Pour le vendredi 13 novembre,

Complexes, analyse

Exercice 1.

Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$$(E_1) : z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0 \qquad (E_2) : z^3 + (4-2i)z^2 + (19-14i)z + 30 - 20i = 0$$

$$(E_3) : (z-1)^4 = 1 \qquad (E_4) : e^z = \sqrt{3} - i$$

Indications : $15^2 = 225$ et $17^2 = 289$.

Exercice 2.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) - 4\cos(x)\cos(2x)$.

1) Linéariser $\cos(x)\cos(2x)$.
2) Simplifier l'expression de $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
3) Montrer f et F sont 2π-périodiques.
4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   Indication : on pourra exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ (uniquement).
5) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-\pi; \pi]$.
6) Construire le tableau de variations de F sur $[-\pi; \pi]$.
7) Représenter graphiquement F.

Exercice 3.

Soit $h : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

1) Quel est l'ensemble de définition de h ?
   Dans la suite, on note D cet ensemble.
2) Montrer que h est dérivable sur D et calculer h'.
3) Montrer que $\forall x \in D$, $h(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.