Correction DM n°2

Exercice 1.

$$(E_1) : z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$$

$\Delta = (2+i)^2 - 4 \times (-1+7i) = 4 - 1 + 4i + 4 - 28i = 7 - 24i$

Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 &=& 7 \\ 2ab &=& -24 \\ a^2 + b^2 &=& \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 &=& 7 + 25 \\ ab &<& 0 \\ 2b^2 &=& 25 - 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a^2 &=& 16 \\ ab &<& 0 \\ b^2 &=& 9 \end{array}\right.$$

On choisit par exemple $\delta = 4 - 3i$.

Donc E_1 a deux solutions qui sont

$$z_1 = \frac{2 + i + 4 - 3i}{2} = 3 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2 + i - 4 + 3i}{2} = -1 + 2i$$

$$(E_2) : z^3 + (4 - 2i)z^2 + (19 - 14i)z + 30 - 20i = 0$$

$z = -2$ est racine évidente.

On peut donc factoriser le premier membre de (E_2) par $z + 2$: plus précisément

$z^3 + (4 - 2i)z^2 + (19 - 14i)z + 30 - 20i = (z + 2)\left(z^2 + 2(1 - i)z + 15 - 10i\right)$.

Donc $(E_2) \Leftrightarrow (z + 2)\left(z^2 + 2(1 - i)z + 15 - 10i\right) = 0 \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{lcl} z &=& -2 \\ \text{ou} & & \\ z^2 + 2(1 - i)z + 15 - 10i &=& 0 \end{array}\right.$

$\Delta = 4(1 - i)^2 - 4 \times (15 - 10i) = -8i - 60 + 40i = -60 + 32i$.

Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 &=& -60 \\ 2ab &=& 32 \\ a^2 + b^2 &=& \sqrt{60^2 + 32^2} = 4\sqrt{15^2 + 8^2} = 4\sqrt{289} = 68 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 &=& 8 \\ ab &>& 0 \\ 2b^2 &=& 128 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a^2 &=& 4 \\ ab &>& 0 \\ b^2 &=& 64 \end{array}\right.$$

On choisit par exemple $\delta = 2 + 8i$.

Donc (E_2) a trois solutions, $z_0 = -2$ ainsi que

$$z_1 = \frac{-2 + 2i + 2 + 8i}{2} = 5i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-2 + 2i - 2 - 8i}{2} = -2 - 3i$$

$$(E_3) : (z - 1)^4 = 1$$

Il est immédiat, d'après la forme de l'équation (E_3) que $z - 1 \in \mathbb{U}_4$.

Il y a donc quatre solutions à l'équation qui sont

$$\mathcal{S} = \{1 + 1; 1 + i; 1 - 1; 1 - i\} = \{2; 1 + i; 0; 1 - i\}$$

$$(E_4) : e^z = \sqrt{3} - i$$

On met $\sqrt{3} - i$ sous forme trigonométrique :
$\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{3+1} = 2$.
Donc $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{-1}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
On cherche alors $z = a + ib$ sous forme algébrique, et par propriétés du cours :
$e^a = 2$ donc $a = \ln(2)$ puis
$e^{ib} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc $b = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Finalement, les solutions de (E_4) sont les complexes de la forme $z = \ln(2) - i\dfrac{\pi}{6} + 2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) - 4\cos(x)\cos(2x)$.

1) Pour tout réel x :
$$\begin{aligned}\cos(x)\cos(2x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} \\ &= \frac{e^{i3x}+e^{-ix}+e^{ix}+e^{-3ix}}{4} \\ &= \frac{2\cos(3x)+2\cos(x)}{4} = \frac{\cos(3x)+\cos(x)}{2}\end{aligned}$$

2) En utilisant l'expression de la questio précédente :
$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(3t) - 4\frac{\cos(3t)+\cos(t)}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\sin(3t)}{3} - 2\sin(t)\right]_0^x$.
Donc, pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{-\sin(3x)}{3} - 2\sin(x)$.

3) f et F sont sommes et produits de fonctions 2π-périodiques, donc sont 2π-périodiques.

4) On souhaite résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Pour cela, on transforme l'expression de f :
$f(x) = \mathcal{R}e\left(e^{3ix}\right) - 4\cos(x) \times (2\cos^2(x) - 1)$.
Or $e^{3ix} = (e^{ix})^3 = \cos^3(x) + 3i\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) - i\sin^3(x)$.
Donc, pour tout réel x,
$$\begin{aligned}f(x) &= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) - 4\cos(x) \times (2\cos^2(x) - 1) \\ &= \cos^3(x) - 3\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) - 8\cos^3(x) + 4\cos(x) \\ &= -4\cos^3(x) + \cos(x)\end{aligned}$$
Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x)\left(1 - 4\cos^2(x)\right) = 0$.
Or un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Donc, ou bien $\cos(x) = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
Ou bien $\cos^2(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pm\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = \frac{\pm 2\pi}{3}[2\pi]$.
Finalement, sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{-2\pi}{3}; \frac{-\pi}{2}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right\}$, les autres solutions étant obtenues à partir de celles-ci en ajoutant un multiple entier de 2π.

5) On souhaite résoudre $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-\pi;\pi]$.
On reprend l'expression de $f(x) = \cos(x)\left(1 - 4\cos^2(x)\right) = \cos(x)\big(1-2\cos(x)\big)\big(1+2\cos(x)\big)$ obtenue à la question précédente et on fait un tableau de signes, sachant que, sur $[-\pi;\pi]$:
- $\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

- $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$;
- $\cos(x) \geqslant \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Valeur de x	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $\cos(x)$	-		-	0	+		+		+	0	-		-		
Signe de $1-2\cos(x)$	+		+		+	0	-	0	+		+		+		
Signe de $1+2\cos(x)$	-	0	+		+		+		+		+	0	-		
Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+		

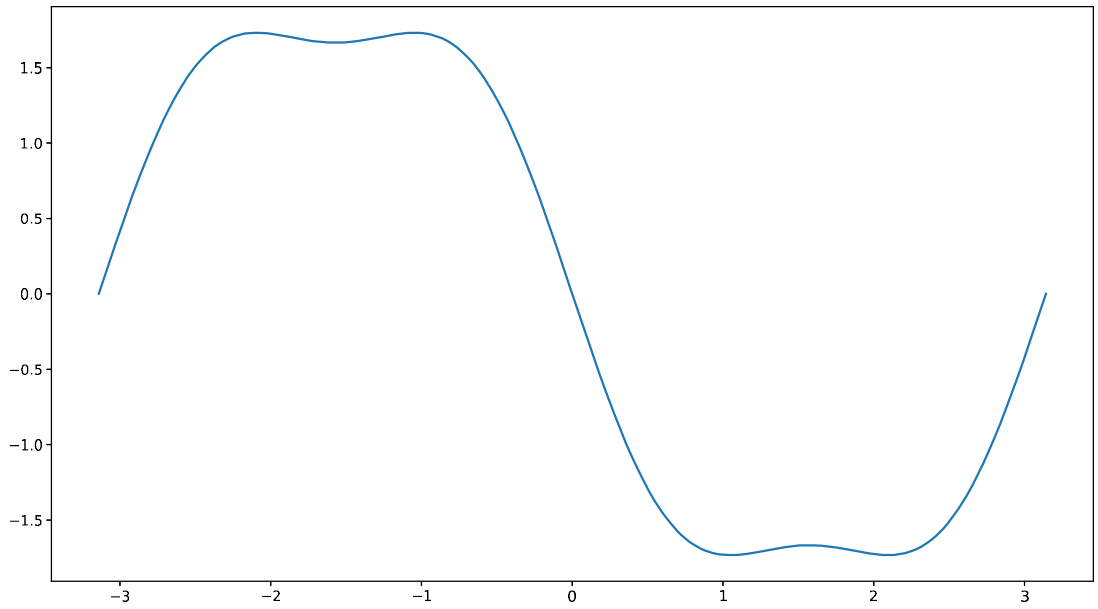
Finalement, l'ensemble des solutions de cette inéquation est donc

$$\mathcal{S} = \left[-\pi; \frac{-2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{-\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$$

6) f étant la dérivée de F sur $[-\pi; \pi]$, les variations de F sont données par le signe de f. Donc :

Valeur de x	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
Variations de F		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

7)



Exercice 3.

1) $h(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ est définie si et seulement si $1 - x^2 > 0$.
Or $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$.
Donc l'ensemble de définition de h est $D =]-1; 1[$.

2) h est la composée de Arctan, dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'un quotient de fonctions dérivable sur D, donc est dérivable sur D.
De plus, $\forall x \in D$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} - x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \\ &= \sqrt{1-x^2} \times \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^2} \times \frac{1-x^2}{1-x^2+x^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

3) D'après la question précédente, $\forall x \in D, h'(x) = \text{Arcsin}'(x)$.
De plus $D =]-1;1[$ est un intervalle.
Donc il existe un réel r tel que $\forall x \in D, h(x) = \text{Arcsin}(x) + r$.
Or pour $x = 0$, $h(0) = \text{Arctan}(0) = 0$ et $\text{Arcsin}(0) = 0$ donc $r = 0$.
Donc

$$\forall x \in]-1;1[, \text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$