Nombres complexes, fonctions de référence, intégrales

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercices

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe :

$$(E_1) : z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$$

$$(E_2) : z^3 + 2iz^2 - 3z = 0$$

$$(E_3) : (z-i)^4 = 1$$

Exercice 2.

1) Étant donnés deux réels a et b, donner la formule de linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$.
2) Soit n un entier naturel et x un réel.
   Montrer que
   $$\cos\big((n+2)x\big) = 2\cos(x)\cos\big((n+1)x\big) - \cos(nx)$$
3) Soit x un réel.
   Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
4) ***En n'utilisant que les deux questions précédentes*** :
   a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   b) Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.

Exercice 3.

Fonction W de Lambert

Soit f la fonction définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array} \right.$$

1) Étudier f et construire son tableau de variations.

2) Montrer que f est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
Conformément au résultat de cette question, on note $W = f^{-1}$ la bijection réciproque de la fonction f.
Notamment, W est définie sur J et à valeurs dans $[-1;+\infty[$.

3) Soit $x \in J$. Que vaut $W(x)e^{W(x)}$?

4) Montrer que W est dérivable sur $\left]\frac{-1}{e};+\infty\right[$ et que

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{e};+\infty\right[, W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

5) En effectuant une intégration par partie, montrer qu'une primitive de f est

$$F(x) = \int^x te^t \mathrm{d}t = (x-1)e^x$$

6) Donner une expression (sans signe $\int$) de $G(x) = \displaystyle\int^x t^2 e^t \mathrm{d}t$.

7) En effectuant le changement de variable $u = f(t)$ (c'est-à-dire $t = W(u)$...), montrer que

$$\forall x \in J, \int^x W(u)\mathrm{d}u = xW(x) - x + e^{W(x)}$$

Extrait de Wikipedia : *Jean-Henri Lambert (1728-1777) est un mathématicien et philosophe. Il s'est illustré en mathématiques pures (il a démontré que le nombre π est irrationnel) et en mathématiques appliquées.*

Exercice 4.

1) En étudiant la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$$

Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

2) Montrer que $0 < \dfrac{q-p}{p+q} < 1$.

3) Soit $A = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)$.
Montrer que $A \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

4) Calculer la valeur de A.
Remarque : on montrera notamment que la valeur de A ne dépend pas de p et de q.

5) Rappeler la formule donnant $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$ lorsque $\tan(2x)$ et $\tan(x)$ sont définis.

6) Calculer $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$.

7) ***Formule de Machin*** :
Déduire des question précédentes que

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Extrait de Wikipedia : *John Machin est un mathématicien anglais connu principalement pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre π grâce à la formule qui porte son nom.*