Correction DS n°2

Exercice 1.

$$(E_1) : z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$$

$\Delta = (1-3i)^2 + 4(4+3i) = 8 + 6i$
Cherchons $\delta = x + iy$ tel que $\Delta = \delta^2$.
$\left\{\begin{array}{lcl} \delta^2 & = & \Delta \\ |\delta|^2 & = & |\Delta| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & 8 \\ 2xy & = & 6 \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{8^2+6^2} = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x^2 & = & 18 \\ 2xy & = & 6 > 0 \\ 2y^2 & = & 2 \end{array}\right.$
Par exemple, $\delta = 3 + i$.
Les solutions de (E_1) sont donc :

$$z_1 = \frac{-1+3i+3+i}{2} = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+3i-3-i}{2} = -2 + i$$

$$(E_2) : z^3 + 2iz^2 - 3z = 0$$

0 est racine évidente :-)
$(E_2) \Leftrightarrow z\left(z^2 + 2iz - 3\right) = 0$
$\Delta = (2i)^2 + 4 \times 3 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$
Les solutions de l'équation sont donc

$$\mathcal{S}_2 = \{0; -i + 2\sqrt{2}; -i - 2\sqrt{2}\}$$

$$(E_3) : (z-i)^4 = 1$$

z est solution de (E_3) si et seulement si $z - i$ est une racine quatrième de l'unité.
Donc les solutions de $(E-3)$ sont les complexes z vérifiant :
$z - i = e^{\frac{2ik\pi}{4}}$, où $k \in [\![0; 3]\!]$.
C'est-à-dire $z = i + 1$ ou $z = i + i = 2i$ ou $z = i - 1$ ou $z = i - i = 0$.

$$\mathcal{S}_3 = \{0; 2i; 1+i; -1+i\}$$

Exercice 2.

1) $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$.
2) Soit n un entier naturel et x un réel.
   Posons $a = (n+1)x$ et $b = x$.
   $\cos\big((n+1)x\big)\cos(x) = \dfrac{\cos\left((n+2)x\right) + \cos(nx)}{2}$.
   Donc

$$\cos\big((n+2)x\big) = 2\cos(x)\cos\big((n+1)x\big) - \cos(nx)$$

3) Soit x un réel.
$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

4) ***En n'utilisant que les deux questions précédentes*** :

a) $\cos(3x) = \cos((1+2)x) = 2\cos(x)\cos(2x) - \cos(x) = 2\cos(x)\big(2\cos^2(x) - 1\big) - \cos(x)$
Donc $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

b) Par exemple :
$\cos(4x) = \cos(2\times 2x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2\left(2\cos^2(x) - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.$

Exercice 3.

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ puisque $\exp > 0$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

Valeurs de x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variations de f	0	$\searrow$	$\dfrac{-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection continue, f est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $J = \left[\dfrac{-1}{e};+\infty\right[$.
Conformément au résultat de cette question, on note $W = f^{-1}$ la bijection réciproque de la fonction f.
Notamment, W est définie sur J et à valeurs dans $[-1;+\infty[$.

3) Soit $x \in J$.
$W(x)e^{W(x)} = f(W(x)) = x$ par définition de W, bijection réciproque de f.

4) Utilisons maintenant le théorème de la bijection dérivable : f étant dérivable sur $[-1;+\infty[$, W est elle-même dérivable en tout réel $x \in J$ tel que $f'(W(x)) \neq 0$.
Or $f'(W(x)) = (W(x)+1)e^{W(x)} = W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)} = x + e^{W(x)}$.
Donc $f'(W(x)) \neq 0$ si et seulement si $W(x) \neq -1$, ce qui équivaut à $x \neq f(-1) = \dfrac{-1}{e}$.
Finalement, W est dérivable sur $\left]\dfrac{-1}{e};+\infty\right[$ et

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{e};+\infty\right[, W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

5) Soit x un réel.
$F(x) = \displaystyle\int^x te^t\mathrm{d}t = [te^t]^x - \int^x e^t\mathrm{d}t = xe^x - [e^t]^x = (x-1)e^x.$

6) $G(x) = \displaystyle\int^x t^2e^t\mathrm{d}t = \left[t^2e^t\right]^x - \int^x 2te^t\mathrm{d}t = x^2e^x - 2F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x.$

7) Soit $x \in J$.
On va faire le changement de variable $u = f(t)$ dans l'intégrale $\Omega(x) = \displaystyle\int^x W(u)\mathrm{d}u$.
$u = f(t)$ donc $\mathrm{d}u = f'(t)\mathrm{d}t = (t+1)e^t\mathrm{d}t$. Enfin, comme $x \in J$, on peut affirmer que $t = W(u)$.

$\Omega(x)=\int^{x}W(u)\mathrm{d}u=\int^{W(x)}t(t+1)e^t\mathrm{d}t=\int^{W(x)}te^t+t^2e^t\mathrm{d}t=F(W(x))+G(W(x)).$

Donc

$\Omega(x)=\left(W(x)^2-W(x)+1\right)e^{W(x)}=W(x)\times W(x)e^{W(x)}-W(x)e^{W(x)}+e^{W(x)}.$

C'est-à-dire $\Omega(x)=xW(x)-x+e^{W(x)}$.

Finalement

$$\forall x\in J,\Omega(x)=\int^{x}W(u)\mathrm{d}u=xW(x)-x+e^{W(x)}$$

Exercice 4.

1) Étudions $f : x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.
$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}=0$
Or $\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$ est un intervalle, f' est nulle sur cet intervalle, donc f est une fonction constante.
De plus, $f(1)=\mathrm{Arctan}(1)+\mathrm{Arctan}(1)=2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.
Donc
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)$$

Soient p et q deux entiers tels que $0<p<q$.

2) $q>p$ donc $q-p>0$ et p et q étant strictement positifs, $p+q>0$.
Donc $\dfrac{q-p}{p+q}>0$.
Concernant l'inégalité de droite,
$\dfrac{q-p}{p+q}<1\Leftrightarrow q-p<p+q\Leftrightarrow -p<p$ qui est vraie puisque $p>0$.
On a donc bien $0<\dfrac{q-p}{p+q}<1$.

3) Soit $A=\mathrm{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)$.
$0<p<q$ donc $0<\dfrac{p}{q}<1$. Comme Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc
$$0<\mathrm{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right)<\frac{\pi}{4}$$
De même, en utilisant la question précédente,
$$0<\mathrm{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)<\frac{\pi}{4}$$
Finalement, en faisant la somme de ces deux encadrements, on a bien
$$0<A<\frac{\pi}{2}$$

4) Calculons $\tan(A)$ en utilisant la formule d'addition $\tan(u+v)=\dfrac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\tan(v)}$:
$\tan(A)=\dfrac{\frac{p}{q}+\frac{q-p}{p+q}}{1-\frac{p}{q}\times\frac{q-p}{p+q}}=\dfrac{\frac{p^2+pq+q^2-pq}{p(p+q)}}{\frac{q^2+pq-pq+p^2}{p(p+q)}}.$

Donc $\tan(A) = 1$.
Donc $A = \frac{\pi}{4}[\pi]$. Comme d'après la question précédente $A \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on peut donc affirmer que

$$A = \frac{\pi}{4}$$

notamment que A est indépendant de la valeur de p et de q.

5) Lorsque $\tan(2x)$ et $\tan(x)$ sont définis, on a :
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

6) Soit $B = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $C = 2B$. Il s'agit de calculer la valeur de C.
Commençons par remarquer que $0 < \dfrac{1}{5} < 1$ donc $0 < B < \dfrac{\pi}{2}$ par stricte croissance de Arctan.
De plus $\tan(B) = \dfrac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{25}{24} = \dfrac{5}{12}$.
Remarquons à nouveau que $\tan(B) < 1$. On peut donc préciser l'intervalle contenant B : $0 < B < \dfrac{\pi}{4}$.
Par conséquent $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$.
$\tan(C) = \dfrac{2\tan(B)}{1-\tan^2(B)} = \dfrac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{144}{119} = \dfrac{120}{119}$.
Comme de plus $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$, on peut donc affirmer que $C = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right)$. Finalement, on a donc

$$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$$

7) Posons $p = 119$ et $q = 120$ dans le résultat de la question 4.
On a alors $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
En utilisant par ailleurs la question 1, on a aussi $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Enfin, d'après la question précédente,
$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right)$,
c'est-à-dire :
$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$.
En réorganisant cette dernière identité, on obtient bien la ***formule de Machin*** :

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$