

Résolutions de systèmes linéaires

Dans l'ensemble du TD, on note $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Principe général



Notation

Étant donné un système de n équations à p inconnues, pour $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $i \neq j$, on note

- $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération qui consiste à **échanger les lignes d'indices i et j** ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ où $\lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{K}$, l'opération qui consiste à **remplacer la ligne d'indice i par la combinaison linéaire $\lambda L_i + \mu L_j$** .



Définition 1.1 (Opérations élémentaires)

Les opérations correspondant aux deux notations données ci-dessus sont appelées **opérations élémentaires sur les lignes** d'un système linéaire.



Remarque

On **retiendra** les remarques suivantes :

- dans l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, **il est absolument nécessaire que $\lambda \neq 0$** ;
- deux cas fréquents de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ sont :
 - ★ $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ où $\lambda = 1 \neq 0$;
 - ★ $L_i \leftarrow \lambda L_i$ où $\lambda \neq 0, \mu = 0$.
- à priori, **on ne peut effectuer qu'une seule opération élémentaire à la fois !**

Le principe général de l'algorithme du pivot de Gauss est d'utiliser une ligne L_i du système pour éliminer une des inconnues de **toutes les autres lignes** à l'aide d'opérations élémentaires du type $L_j \leftarrow \lambda L_j + \mu L_i$ avec $\lambda \neq 0$.

On recommence cette étape jusqu'à obtenir :

- ou bien un système possédant une équation ne faisant plus intervenir qu'une seule inconnue : dans ce cas, on peut calculer la valeur de cette inconnue puis de proche en proche obtenir la valeur de chacune des inconnues ce qui conduit à **une unique solution pour le système**;
- ou bien un système où certaines inconnues (appelées **inconnues principales**) peuvent être calculées en fonction des autres inconnues (appelées **inconnues secondaires**) : ce cas conduit à une infinité de solutions puisque chaque valeur (réelle ou complexe) des inconnues secondaires fournit une solution du système;
- un troisième cas possible est que la résolution du système fasse apparaître une ligne du type $0 = 1$, sans inconnue, qui conduit à un système sans solution.

Ex. 1.1 Résoudre le système d'inconnues $(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 4y + 9z + 16t = 1 \\ x + 8y + 27z + 64t = -1 \\ x + 16y + 81z + 256t = -5 \end{cases}$$

Ex. 1.2 Résoudre les systèmes d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y + 4z = 6 \\ x + 7y - 5z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y + 4z = 6 \\ x + 7y - 5z = 3 \end{cases}$$

II. Exercices

Ex. 1.3 Résoudre suivant la valeur du paramètre $u \in \mathbb{R}$ le système

$$S : \begin{cases} (2u-1)x + (u+1)y = 2u+2 \\ (u-1)x + (u+1)y = u+1 \end{cases}$$

Ex. 1.4 Soient a, b, c et α quatre constantes réelles. Discuter et résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = \alpha \\ a^2x + b^2y + c^2z = \alpha^2 \end{cases}$$

Ex. 1.5 [*] Résoudre avec $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ le système d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ réelles suivant

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \\ x_1 + \dots + x_n = s \end{cases}$$

Ex. 1.6 Soient a, b deux complexes non nuls. Résoudre dans $\mathbb{C}^n$:
 $\forall j \in \llbracket 2; n \rrbracket, x_j = ax_{j-1} + b$ et $x_1 = ax_n + b$.