Maths - Feuille d'exos n° 10

Calcul matriciel

I. Ensembles de matrices

Ex. 10.1 Calculer

$$M = -3\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex. 10.2 Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et

$$Y = \begin{pmatrix} 5x+2y-z \\ x+z \\ x-y+3z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}).$$

Trouver une matrice A telle que $Y = AX$.

Ex. 10.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Soit $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne donné. Quels peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $AX = C$?

b. Montrer que l'équation $AX = C$ de la question précédente possède des solutions si et seulement si les coefficients de C sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

c. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 10.4 Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On note L_1, L_2 et L_3 les trois lignes de A.

a. Quels peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $XB = L_1$?

b. Trouver toutes les solutions de $XB = L_1$.

c. Faire de même pour $XB = L_2$ et $XB = L_3$.

d. Résoudre l'équation $MB = A$ d'inconnue M.

Ex. 10.5 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I_3 + J$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ex. 10.6 Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ x & 0 & \frac{1}{x} \\ x^2 & x & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer M^2 et montrer que M^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de M.

En déduire M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 10.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n.

II. Méthode du pivot et calcul matriciel

Ex. 10.8 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On définit de plus les matrices $P = AB$ et $Q = BA$.

a. Calculer les matrices P et Q.

b. En effectuant le minimum de calculs, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $Q^n = 0_3$.

c. Étant donné une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on définit la matrice $R = CA$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R^n = \alpha^{n-1} R$$

où α est un réel dont on donnera une expression.

d. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ne soit ni la matrice nulle, ni la matrice identité et telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = M$$

Ex. 10.9 (Cor.) Discuter suivant les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{K}$ l'inversibilité des matrices suivantes et calculer leur inverse lorsqu'elle existe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & b+c \\ ab & ac & bc \end{pmatrix}$$

Généralisation aux dimensions $n > 3$?

Ex. 10.10 Discuter suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{K}$ l'inversibilité de
$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

III. Divers

Ex. 10.11 On considère les deux suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 6u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases}$.

a. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $A = 5I_2 + J$ où $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à déterminer.

c. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Ex. 10.12 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ puis pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 10.13 Montrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} sont des matrices carrées symétriques.
Peuvent-elles être simultanément inversibles ?
Application numérique : calculer $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. L'une de ces deux matrices est-elle inversible ?

Ex. 10.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ***antisymétrique*** et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur colonne.

a. À quel espace de matrices appartient le produit $X^{\mathrm{T}}AX$?

b. Montrer que $X^{\mathrm{T}}AX = 0$.