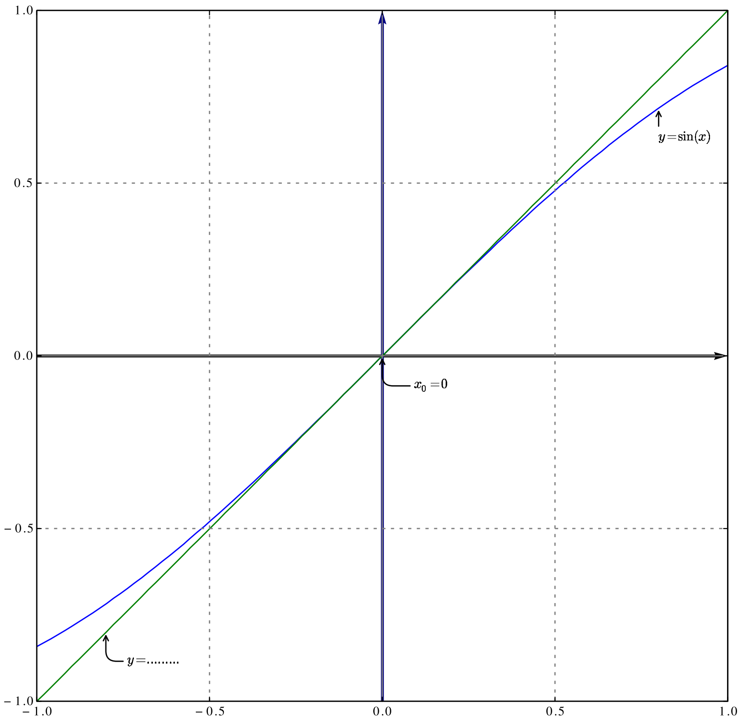
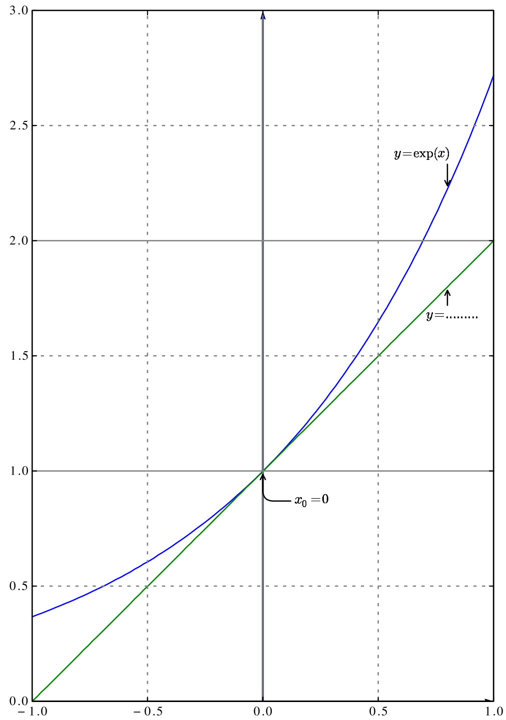
Maths - Chapitre 11

Développements limités

L'IDÉE fondamentale à l'origine des développements limités repose sur une généralisation de la notion de tangente : au voisinage d'un point x_0, la valeur $f(x_0+h)$ d'une fonction f dérivable peut être approximée par $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$, ce qui revient à approximer f par une fonction affine au voisinage de x_0.
Par exemple, au voisinage de 0 : $\sin h \approx$.................... ou encore $e^h \approx$....................





Peut-on obtenir des « approximations de meilleure qualité » à l'aide de polynômes de degré supérieur ?
L'objectif de ce chapitre est d'une part de clarifier la notion d'approximation d'une suite par une autre suite ou d'une fonction par une autre fonction, d'autre part d'élaborer des outils permettant d'obtenir des ***approximations polynomiales des fonctions usuelles***.

I. Équivalence, domination, négligeabilité

I.1. Notion de voisinage

Définition 11.1 (Voisinages d'un réel, voisinages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$).
On dit que I est ***un voisinage de*** x_0 si :
- $x_0 = +\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;

- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

I.2. Relations de comparaison entre suites

Définition 11.2 (Équivalence de suites)

On dit que la suite u est ***équivalente à*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 1.

Notation

Si la suite u est équivalente à la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Définition 11.3 (Domination)

On dit que la suite u est ***dominée par*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ est borné : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$.

Notation

Si la suite u est dominée par la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

Définition 11.4 (Négligeabilité)

On dit que la suite u est ***négligeable devant*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 0.

Notation

Si la suite u est négligeable devant la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ ou plus simplement $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$.

Ex. 11.1 Comparer les suites :

- $u_n = n$ et $v_n = n^2$;
- $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$;
- $u_n = \frac{1}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n}$;
- $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

Cor. 11.1

I.3. Relations de comparaison entre fonctions

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.

Définition 11.5 (Équivalence de fonctions)

On dit que la fonction f est ***équivalente à*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notation

Si la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Définition 11.6 (Domination)

On dit que la fonction f est ***dominée par*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage I de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- le quotient $\dfrac{f}{g}$ est borné sur I : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant M$.

Notation

Si la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O\left(g(x)\right)$.

Définition 11.7 (Négligeabilité)

On dit que la fonction f est ***négligeable devant*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Notation

Si la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}\left(g(x)\right)$ ou plus simplement $f(x) = \underset{x_0}{o}\left(g(x)\right)$.

Ex. 11.2 Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de :

- $x \mapsto \sin(x)$;
- $x \mapsto \exp(x) - 1$;
- $x \mapsto \ln(1 + x)$;
- $x \mapsto \cos(x) - 1$.

Cor. 11.2

I.4. Propriétés des équivalents

Important !

$\cos(x)$	est équivalent à	$1+x$	en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1+x} = 1$
-1	est équivalent à	-1	en 0... et partout ailleurs ! ***Mais***
$\cos(x)-1$	***n'est pas équivalent à***	$\cancel{x}$	en 0 d'après l'exercice précédent.

Il ***n'est donc pas autorisé de faire une somme d'équivalents*** !
On préférera pour les calculs la notion de ***développement limité*** que l'on verra plus loin.
Cependant les propriétés opératoires suivantes peuvent être utilisées dans les cas simples :

Propriété 11.8

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ et $w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} z(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et w ne s'annulent pas ;
2) $v(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u(x)$ et $z(x) \underset{x\to x_0}{\sim} w(x)$;
3) $u(x)w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)z(x)$;
4) $\dfrac{u(x)}{w(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{v(x)}{z(x)}$;
5) $\forall p \in \mathbb{Z}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$ et si $v > 0$ au voisinage de x_0, $\forall p \in \mathbb{R}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$.

Démonstration

Ex. 11.3

1) Montrer que $\ln(e+x)$ et $\cos(x)$ sont équivalents pour $x \to 0$.
2) Trouver un équivalent simple de $\ln(e+x)-1$ pour $x \to 0$.

Cor. 11.3

Propriété 11.9 (Propriétés conservées par équivalence)

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et v sont de même signe ;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ existe et en cas d'existence, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$.

Démonstration

I.5. Propriétés des « petit o »

Propriété 11.10 (Équivalent et « petit o »)

$u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ si et seulement si $u(x) = v(x) + \underset{x\to x_0}{o}(v(x))$.

Démonstration

Propriété 11.11 (Traduction des croissances comparées)

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

- $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$;
- $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\gamma x}\right)$;
- si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\alpha\right)$;
- enfin, quel que soit le réel λ, $\lambda^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.

Ex. 11.4 Montrer que pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}_-^*$,

1) $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^\beta\right)$;

2) $e^{\gamma x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$.

Cor. 11.4

Remarque

On retiendra notamment que la propriété 11.10 permet d'utiliser les « petit o » pour traiter les questions concernant les équivalents. ***Cette propriété doit absolument être connue***.
De plus, la propriété $\alpha > \beta \Rightarrow x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ est elle aussi d'une importante primordiale pour la suite du chapitre. Notons $f(x) \underset{0}{\ll} g(x)$ le fait que $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(g(x))$: on a alors les négligeabilités suivantes

Au voisinage de 0 : $\quad \ldots \underset{0}{\ll} x^3 \underset{0}{\ll} x^2 \underset{0}{\ll} x \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} \frac{1}{x} \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{0}{\ll} \ldots$

Au voisinage de $+\infty$: $\quad \ldots \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{\infty}{\ll} 1 \underset{\infty}{\ll} x \underset{\infty}{\ll} x^2 \underset{\infty}{\ll} x^3 \underset{\infty}{\ll} \ldots$

L'idée générale des développements limités est fondée sur cette propriété : ***nous allons approximer des fonctions au voisinage de*** 0 par des ***polynômes de degré*** n en ***négligeant tous les termes de degré supérieur à*** n.
Pour une approximation ailleurs qu'en 0***, on fera un changement de variable.***

Ex. 11.5 Écrire, avec les mêmes notations que dans la remarque précédente, les relations de négligeabilité

1) au voisinage de -3 ;
2) au voisinage de x_0.

Cor. 11.5

II. Développements limités

II.1. Définitions

Définition 11.12

On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** x_0 et on note f ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si

$$\exists(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

Ou encore, au voisinage de 0, en utilisant $h = x - x_0$ et le signe $\sum$ à la place des pointillés :

$$f(x_0 + h) = \ldots\ldots\ldots + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

La somme .... est appelée ***partie principale*** du DL.

$\underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$ ou $\underset{h \to 0}{o}(h^n)$ est appelé ***reste du*** DL.

Remarque

Comme le changement de variable $h = x - x_0$ est toujours possible, on considèrera souvent par la suite des développements limités en 0, ou on s'y ramènera par changement de variable. En particulier en l'absence d'indications, les « petit o » sont supposés être donnés au voisinage de 0.

II.2. Premier exemple

Développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

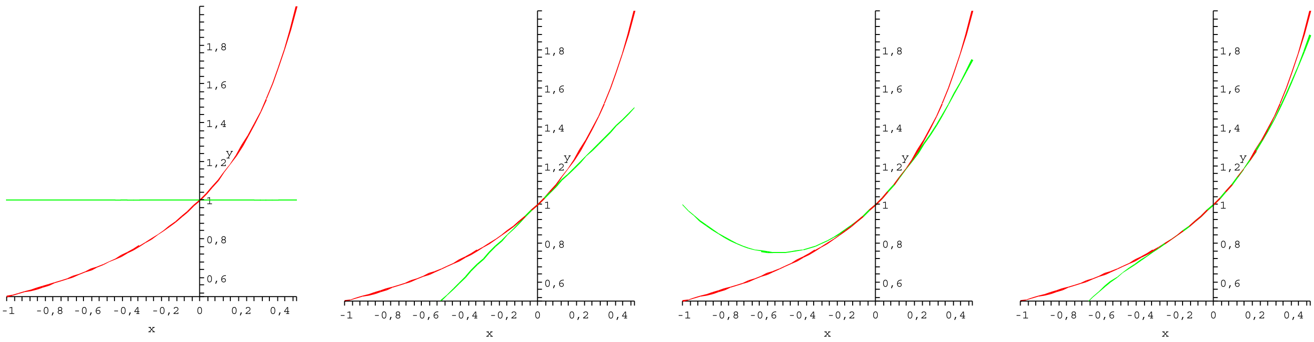
pour tout $x \in]-1; 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ = ...

= ....

....

II.3. Interprétation géométrique

Plus l'ordre du DL est grand, plus la représentation graphique de sa partie principale se rapproche au voisinage de x_0 de $\mathcal{C}_f$.



$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto 1$ et $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto 1+x+x^2$ et $x \mapsto 1+x+x^2+x^3$

II.4. DL, continuité, dérivabilité

Proposition 11.13

Soit x_0 ***un nombre réel***. Si f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$ alors :

- ou bien f est définie en x_0, auquel cas f est continue en x_0 ;
- ou bien f n'est pas définie en x_0, auquel cas f peut être prolongée en une fonction continue en x_0.

Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors f (ou son prolongement continu) est ***dérivable*** en x_0.
Ceci ne se généralise pas au cas $n \geq 2$, c'est-à-dire qu'il est possible qu'une fonction admette un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ sans pour autant être deux fois dérivable en x_0.

Démonstration

II.5. Unicité

Proposition 11.14

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ alors il est unique.

Démonstration

Important !

En revanche, étant donné un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, il existe une infinité de fonctions possédant ce développement limité :

II.6. Troncature et équivalent

Proposition 11.15

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, alors $\forall k \in [\![0; n]\!]$, f admet un $\mathrm{DL}_k(x_0)$ dont la partie principale est la troncature de celle du $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Démonstration

Propriété 11.16 (Équivalent d'une fonction)

Étant donnés un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 sauf éventuellement en x_0 et possédant sur I un développement limité, le premier terme non nul du développement limité de f au voisinage de x_0 est un équivalent de $f(x_0 + h)$ au voisinage de $h \to 0$.

Démonstration

Ex. 11.6 Donner un équivalent de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - 1 - x - x^2$ au voisinage de 0.

II.7. Opérations sur les DL

Propriété 11.17

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de x_0 (sauf éventuellement en x_0) et possédant pour $n \in \mathbb{N}$ un développement limité à l'ordre n en x_0 de parties principales P et Q, alors :

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha f + \beta g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 de partie principale $\alpha P + \beta Q$;
- $f \times g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 dont partie principale est la troncature à l'ordre n de PQ ;
- si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0.

Démonstration

Théorème 11.18

Si f est dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f'.

Plus précisément, si $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Corollaire 11.19

Si f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ ***et si*** f' ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui de f' est obtenu en dérivant celui de f.

Important !

La condition « f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ » est primordiale. Sans elle, on ne peut pas dériver.

Ex. 11.7 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ et $x \mapsto e^x$.

II.8. Formule de Taylor-Young

Définition 11.20 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$)

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I est ***de classe*** $\mathcal{C}^n$ ***sur*** I, si elle est n fois dérivable en tout point de I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue.

Théorème 11.21 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

Démonstration

La démonstration sera effectuée dans le chapitre sur l'intégration.

Méthode : Utilisation de la formule de Taylor-Young

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors f admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$ celui donné par la formule de Taylor-Young.
Cependant, il y a souvent plus simple pour obtenir ce développement limité.
La formule de Taylor-Young est de ce fait davantage un outil théorique qu'un outil pratique.

Important !

On rappelle (voir proposition 11.13) que f peut admettre un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ sans pour autant être $\mathcal{C}^n(x_0)$. Mais si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, elle possède en tout point de I un unique développement limité à l'ordre n donné par la formule de Taylor-Young.

Ex. 11.8 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto e^x$, le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$, enfin obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Remarques

Le développement limité de $(1+x)^\alpha$ incite à généraliser la définition des coefficients binomiaux :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On a alors $(1+x)^\alpha =$ ....

Ex. 11.9 $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \tan x$.

Cor. 11.9

II.9. Résumé

Voici une liste des DL(0) à connaître et de la façon dont on les obtient :

Fonction	DL(0)	Démonstration
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	Somme des termes d'une suite géométrique.
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto e^x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie paire de e^x.
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie impaire de e^x.
$x \mapsto \cos x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{R}e\,(e^{ix})$.
$x \mapsto \sin x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{I}m\,(e^{ix})$.
$x \mapsto \tan x$	$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	Quotient de sin par cos, $\tan' = 1 + \tan^2$.
$x \mapsto \ln(1+x)$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Les développements limités en 0 de Arccos et Arcsin s'obtiennent par primitivation.
Ils ne sont pas à retenir. On les retrouve au besoin pour de petites valeurs de n.

III. Utilisations

III.1. Limite, continuité, dérivabilité, tangente

Les propriétés 11.9 et 11.10 permettent de démontrer immédiatement les résultats suivants :

Théorème 11.22 (Utilisation des développements limités)

Soit f une fonction définie sur un voisinage I du réel x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.

- Si f possède un développement limité $f(x_0+h) = a_0 + \underset{h\to 0}{o}(1)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$.
  De plus, soit f est définie et continue en x_0, soit f est prolongeable par continuité par a_0 en x_0 (voir la proposition 11.13).
- Si f possède un développement limité $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + a_p h^p + \underset{h\to 0}{o}(h^p)$ (avec $a_p \neq 0$) alors
  - ⋆ f est continue ou prolongeable par continuité par a_0 en x_0 ;
  - ⋆ f (ou son prolongement) est dérivable et $f'(x_0) = a_1$;
  - ⋆ l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$;
  - ⋆ on peut connaître les positions relatives de la courbe et de sa tangente en étudiant le signe de $a_p h^p$ au voisinage de $h \to 0$.
- Le premier terme non nul du développement limité de f en x_0 fournit un équivalent de f au voisinage de x_0 (voir la proposition 11.16).

Ex. 11.10 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{Arcsin}(x)}$ pour $x \neq 0$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2) Montrer que f peut être prolongée par continuité en $x = 0$.
3) Tracer la représentation graphique de f sur son ensemble de définition.
   Préciser notamment la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

Cor. 11.10

Ex. 11.11 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

1) Déterminer si u converge et si oui, donner sa limite.
2) Dans le cas où u converge vers $l \neq 0$, donner un équivalent (simple) de $u_n - l$.

III.2. Asymptotes et développements asymptotiques

Durant tout le chapitre, nous avons considéré des développements limités, c'est-à-dire des développements de la forme $f(x_0+h) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$. On peut généraliser cette notion en admettant tous les développements de la forme :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=-p}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

De tels développements sont appelés ***développements limités généralisés*** ou encore ***développements asymptotiques***.

Ex. 11.12 Donner les 4 premiers termes du développement asymptotique de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x)}$ en 0.

Cor. 11.12

Méthode : Détermination d'asymptotes obliques

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à la représentation graphique d'une fonction f en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.
Les développements ***asymptotiques*** peuvent être utilisés pour l'obtention d'***asymptotes obliques*** à la représentation graphique d'une fonction f en posant pour $x \to \pm\infty$, $h = \frac{1}{x} \to 0$ puis en développant $f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0 :
si $f\left(\frac{1}{h}\right) = \dfrac{a}{h} + b + \underset{h\to 0}{o}(1)$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f.

Ex. 11.13 Effectuer un développement asymptotique de $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$ et en déduire la position de C_f relativement à ses asymptotes.

Cor. 11.13

Ex. 11.14 Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de g ?
2) Montrer que la représentation graphique de g possède deux asymptotes obliques au voisinage de $\pm\infty$.
   On donnera une équation de chacune des asymptotes obliques.
3) Étudier les variations de g et construire sa représentation graphique.

Cor. 11.14