

Développements limités

I. Développements limités : calcul

Ex. 11.1 Donner le développement limité à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

- $x \mapsto e^x$ au voisinage de 1 ;
- $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$;
- $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ au voisinage de $\frac{1}{2}$.

Ex. 11.2 DL en 0 des expressions suivantes :

- $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
- $\frac{\sin(x)}{x}$ à l'ordre 7
- $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4
- $\frac{\ln(1-x)}{\ln(1-x)}$ à l'ordre 2
- $\operatorname{Arccos}(x)$ à l'ordre 5
- $e^{\cos x}$ à l'ordre 4
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ à l'ordre 7

Ex. 11.3 (Cor.)

a. Donner un DL en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} &\mapsto \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} &\mapsto \frac{1}{1-x} - 1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} &\mapsto \frac{x+1}{x-1} & x \in \mathbb{R}^* &\mapsto \frac{e^x - 1}{x} \\ x \in]-\infty; 1[&\mapsto -\ln(1-x) & x \in \mathbb{R} &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \\ x \in \mathbb{R} &\mapsto \cos(\sqrt{2}x) & x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

b. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ex. 11.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f(x)}{f(x)} = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

- Vérifier que f possède un $DL_2(0)$.
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas $C^1(\mathbb{R})$.

Ex. 11.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^x = n - x$ admet une unique solution positive que l'on note x_n .
Déterminer un équivalent u_n de x_n puis un équivalent de $x_n - u_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Ex. 11.6 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{1 - \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch} x - 2}{x^4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

II. Développements limités : utilisation

Ex. 11.7 Soit f définie sur $] -\pi; \pi[\setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

- Déterminer un $DL_3(0)$ de f .
- En déduire que f peut être prolongée en 0 en une fonction dérivable.

On note g ce prolongement.

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Ex. 11.8 CCP MP 2019 - n°1

a. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

b. Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$, de

$$u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ex. 11.9 D'après CCP MP 2019 - n°46 On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

a. Prouver que $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

b. Donner la limite, puis un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

Ex. 11.10

a. Prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x = \tan(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n =]n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

b. Exprimer $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ en fonction de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

c. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où on explicitera a et b .

Ex. 11.11 Asymptote et position par rapport à la courbe en $+\infty$

1. $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 2. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ en $\pm\infty$

3. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 4. $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$



Méthode : Recollement de solutions d'une EDL1

Lorsqu'une équation différentielle linéaire à l'ordre 1 est de la forme $u(t)y' + v(t)y = w(t)$, on commence par la diviser par $u(t)$ sur des intervalles où $u(t)$ ne s'annule pas pour obtenir une EDL1 de la forme $y' + a(t)y = b(t)$.

Une fois cette équation résolue (avec des constantes différentes sur chaque intervalle où $u(t)$ ne s'annule pas), on cherche à savoir si les solutions peuvent être **recollées** aux points où $u(t)$ s'annule pour obtenir des fonctions dérivables (donc continues).

Pour effectuer ce recollement, on utilise les développements limités grâce à la proposition 11.13 du cours sur les développements limités.

Ex. 11.12 Trouver l'ensemble des fonctions $f :]-\infty; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in]-\infty; 1[, t(t-1)f'(t) - (t-2)f(t) = 0$.

Ex. 11.13

a. Donner les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de $(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$.

b. Même question pour $x(1-x)y' + y = x-1$.

Corrections

Cor. 11.3 : Exemple de calcul de la première limite :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} - 1 = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Remarque importante : ici, par définition, $\epsilon(x) = \frac{o(1)}{x \rightarrow 0}$ est une fonction vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon(x)}{1} = 0$.

À retenir : $\frac{o(1)}{x \rightarrow 0}$ représente une **expression tendant vers 0 lorsque x tend vers 0**.

D'une manière générale, $\frac{o(1)}{x \rightarrow x_0}$ représente une **expression tendant vers 0 lorsque x tend vers x_0** .

Autrement dit, une fonction est négligeable devant 1 lorsqu'elle tend vers 0 (au voisinage d'un point).

Retour au calcul de limite :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{o(1)}{x \rightarrow 0} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$