# DL, intégrales, suites, calcul matriciel

<u>L'usage d'une calculatrice est interdit.</u>

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.***

## Exercices

### Exercice 1.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$.

1) Calculer, en fonction de $a$, la matrice $A^{-1}$ lorsqu'elle existe.
   ***On prendra notamment soin de préciser les valeurs de $a$ pour lesquelles la matrice n'est pas inversible.***

2) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 2a \\ x & + & y & + & az & = & 3-a \\ ax & + & y & + & az & = & a+1 \end{array}\right.$ d'inconnues $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$.

### Exercice 2.

Le but de cet exercice est de donner l'expression des coefficients des développements limités de Arcsin et de Arccos en 0 à l'ordre $2n+1$.

1) Rappeler l'expression, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, de $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}$.

2) Calculer $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.

4) Donner l'expression du développement limité de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ à l'ordre $n$ en 0.

5) Donner l'expression du développement limité de $\mathrm{Arcsin}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

6) Donner l'expression du développement limité de $\mathrm{Arccos}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

**Exercice 3.**

Soit $x$ un réel quelconque et $u$ la suite ***réelle*** définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & x \\ u_{n+2} & = & 2xu_{n+1} - u_n \end{array}\right.$.

1) Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Donner $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2) Dans cette question, on suppose que $x = \frac{1}{2}$.
   Montrer que pour tout entier $n$, $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.
3) Dans cette question, on suppose que $x = 2$.
   a) Exprimer $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que pour tout entier $n$, $u_n = \dfrac{\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor + 1}{2}$.
   c) Montrer que pour tout entier $n$, 3 est un diviseur de $u_n - 2^n$.
4) Dans cette question, $x$ est un réel quelconque.
   Exprimer $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4.**

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ définie pour tout entier naturel $n$.

1) Calculer $I_0$, $I_1$ et $I_2$.
2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2}$.
3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{lcl} (-1)^n I_{2n} & = & \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} & = & \dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{array}$$

4) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$.
5) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.
6) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.
7) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.