Correction DS n°3

Exercice 1.

1) $$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 0 & 1-a & a-1 & y-x \\ 0 & 1-a^2 & 0 & z-ax \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 0 & 1-a & a-1 & y-x \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x-(1+a)y+z \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2$$

Discussion :

- si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{-x+y}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & x - \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-x+y}{1-a} + \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

Or $x - \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} = \dfrac{(1-a^2)x - x + (1+a)y - z}{1-a^2} = \dfrac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2}$

et $\dfrac{-x+y}{1-a} + \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} = \dfrac{-(1+a)x+(1+a)y+x-(1+a)y+z}{1-a^2} = \dfrac{-ax+z}{1-a^2}$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dfrac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2} - a\dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

Enfin, $$\begin{aligned} \frac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2} - a\frac{-ax+z}{1-a^2} &= \frac{-a^2x+(1+a)y-z+a^2x-az}{1-a^2} \\ &= \frac{(1+a)y-(1+a)z}{1-a^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{(1+a)y-(1+a)z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1+a}{1-a^2} & \dfrac{-1-a}{1-a^2} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & 0 & \dfrac{1}{1-a^2} \\ \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-1-a}{1-a^2} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{-1}{1-a} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & 0 & \dfrac{1}{1-a^2} \\ \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-1}{1-a} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

- si $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

  et la matrice A n'est donc pas inversible.

- Enfin, si $a = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & x+z \end{pmatrix}$$

  et la matrice A n'est pas non plus inversible.

2) Le système $\begin{cases} x + ay + z = 2a \\ x + y + az = 3-a \\ ax + y + az = a+1 \end{cases}$ d'inconnues $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3-a \\ a+1 \end{pmatrix}.$$

Discussion :

- si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, alors la matrice A est inversible et le système possède donc une unique solution qui est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2a \\ 3-a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2-2a}{1-a} \\ \dfrac{-2a^2+a+1}{1-a^2} \\ \dfrac{a^2+a-2}{1-a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \dfrac{2a+1}{a+1} \\ \dfrac{-a-2}{a+1} \end{pmatrix}$$

- si $a = 1$, le système se réécrit :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z = 2$$

  Il possède donc une infinité de solutions qui sont :

$$\mathcal{S} = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=2\right\} = \left\{(2-y-z;y;z) \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\right\}$$

- enfin, si $a = -1$, le système se réécrit :

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + y - z = 4 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

En faisant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, on obtient donc le système équivalent
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 0 & & & = & -2 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \text{ qui est incompatible.}$$
Il n'y a donc pas de solution.

Exercice 2.

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$: par définition,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1\times 2\times ...\times k} = \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}{k!}.$$

2) $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1$.

$\binom{\frac{-1}{2}}{1} = \dfrac{-1}{2}$.

$\binom{\frac{-1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}}{2} = \dfrac{3}{8}$.

$\binom{\frac{-1}{2}}{3} = \dfrac{\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}\times\frac{-5}{2}}{6} = \dfrac{-5}{16}$.

3) Montrons par récurrence que $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k\dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$.

Initialisation : pour $k=0$, $(-1)^k\dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2} = 1$ et $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1$.

Hérédité : supposons que pour k entier donné, $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k\dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}\binom{\frac{-1}{2}}{k+1} &= \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{-1}{2}-j\right)}{(k+1)!} \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{2}-j\right)}{k!}\times\frac{\frac{-1}{2}-k}{k+1} \\ &= (-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\times\frac{-(2k+1)}{2(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\times\frac{(2k+1)(2k+2)}{2(k+1)\times 2(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1}\frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}\end{aligned}$$

Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k\dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$.

4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}u^k + \underset{u\to 0}{o}(u^n)$.

5) $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1;1[$ donc en posant $u = -x^2$ dans le développement limité précédent, et en remarquant que $\text{Arcsin}(0) = 0$, on a :

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

6) De même qu'à la question précédente, en remarquant que $\text{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

Exercice 3.

1) $x = 1$ donc u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Équation caractéristique : $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = An + B$, où $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.
On utilise les valeurs de u_0 et u_1 pour identifier A et B :
$u_0 = 1 \Rightarrow B = 1$ et $u_1 = 1 \Rightarrow A + B = 1 \Rightarrow A = 0$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

2) $x = \dfrac{1}{2}$, donc u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+2} &= u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Équation caractéristique : $z^2 - z + 1 = 0$ qui a deux solutions $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$, où $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.
À nouveau, on utilise les conditions initiales pour identifier A et B :
$\begin{cases} A &= 1 \\ A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 0 \end{cases}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

3) $x = 2$ donc u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

a) Équation caractéristique : $z^2 - 4z + 1 = 0$ qui a deux solutions $z_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - \sqrt{3}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\left(2+\sqrt{3}\right)^n + B\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ où $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.
En utilisant les valeurs de u_0 et u_1 on obtient donc le système suivant vérifié par A et B :
$\begin{cases} A + B &= 1 \\ A\left(2+\sqrt{3}\right) + B\left(2-\sqrt{3}\right) &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B &= 1 \\ B\left(2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}\right) &= 2-2-\sqrt{3} \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ B &= \frac{1}{2} \end{cases}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$.

b) $0<2-\sqrt{3}<1$, donc pour tout entier n, $0<\left(2-\sqrt{3}\right)^n<1$.
Donc pour tout entier n, on a $\left(2+\sqrt{3}\right)^n<\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n<\left(2+\sqrt{3}\right)^n+1$.
Or $u_0\in\mathbb{Z}$, $u_1\in\mathbb{Z}$, et $u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n$ donc par une récurrence immédiate, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n$ est entier.
Comme par ailleurs $2u_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, on en déduit que $p=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est aussi entier quelle que soit la valeur de $n\in\mathbb{N}$.
Donc le réel $x=\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ vérifie $x<p<x+1$, c'est-à-dire que $p=\lfloor x+1\rfloor$.
Donc pour tout entier n positif, $u_n=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}=\dfrac{\left\lfloor(2+\sqrt{3})^n\right\rfloor+1}{2}$.

c) En développant l'expression de u_n grâce au binôme de Newton, on obtient pour tout entier positif n :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{3}^k+\left(-\sqrt{3}\right)^k\right)2^{n-k}}{2}\\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2\sqrt{3}^k2^{n-k}}{2} \quad \text{car pour } k \text{ impair } \sqrt{3}^k+\left(-\sqrt{3}\right)^k=0\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}3^k2^{n-2k}
\end{aligned}$$

Donc $u_n=2^n+3\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}3^{k-1}2^{n-2k}$ et par conséquent 3 divise u_n-2^n.

4) Soit $x\in\mathbb{R}$ et u définie par $\begin{cases}u_0 &= 1\\ u_1 &= x\\ u_{n+2} &= 2xu_{n+1}-u_n\end{cases}$

Équation caractéristique : $z^2-2xz+1=0$
Discriminant : $\Delta=4x^2-4=4(x^2-1)$.
Le discriminant est strictement positif si et seulement si $x^2>1\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
On a donc trois cas :

- $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, d'où $\Delta>0$. L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes
$z_1=\dfrac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2}=x+\sqrt{x^2-1}$ et $z_2=x-\sqrt{x^2-1}$.
Donc il existe $(A;B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier positif n, $u_n=Az_1^n+Bz_2^n$.
Or $u_0=1$ et $u_1=x$ donc $\begin{cases}A+B &= 1\\ A(x+\sqrt{x^2-1})+B(x-\sqrt{x^2-1}) &= x\end{cases}$ dont on déduit que $A=B=\dfrac{1}{2}$. En résumé,

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$$

- Si $x=-1$ ou $x=1$, d'où $\Delta=0$. L'équation caractéristique possède une unique racine réelle $z_0=\dfrac{2x}{2}=x$ donc il existe $(A;B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=Ax^n+Bnx^n$.
Or $u_0=1$ et $u_1=x$ donc $\begin{cases}A &= 1\\ Ax+Bx &= x\end{cases}$ dont on déduit que $A=1$ et $B=0$. En

résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x^n = (\pm 1)^n$$

- Si $x \in]-1;1[$, d'où $\Delta < 0$. L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes
  $z_1 = x + i\sqrt{1-x^2} = e^{i \operatorname{Arccos}(x)}$ et $z_2 = e^{-i \operatorname{Arccos}(x)}$.
  Donc il existe $(A;B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier positif n, $u_n = A\cos(n \operatorname{Arccos}(x)) + B\sin(n \operatorname{Arccos}(x))$.
  Or $u_0 = 1$ et $u_1 = x$ donc $\begin{cases} A & = 1 \\ Ax + B\sqrt{1-x^2} & = x \end{cases}$ dont on déduit que $A = 1$ et $B = 0$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$$

Exercice 4.

1) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^0}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1 - I_0 = \frac{4-\pi}{4}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n \frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

3) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation :

$(-1)^0 I_0 = I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

De même, $(-1)^0 I_{2\times 0+1} = I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k} = \frac{\ln(2)}{2}$.

Hérédité :

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait

$$\begin{aligned} (-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}I_{2(n+1)} &= (-1)^{n+1}I_{2n+2}\\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1}-I_{2n}\right) \quad \text{d'après la question 2)}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}+(-1)^n I_{2n}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1}+\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence}\\
&= \frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}I_{2(n+1)+1} &= (-1)^{n+1}I_{2n+3}\\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+2}-I_{2n+1}\right) \quad \text{d'après la question 2)}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2}+(-1)^n I_{2n+1}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}+\frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence}\\
&= \frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

La propriété est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}\\
(-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$.

- $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car le membre droit est un quotient dont le numérateur est positif et le dénominateur strictement positif.
- $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car $\dfrac{x^n}{1+x^2} \geqslant 0$ d'après le point précédent.
- $1+x^2 \geqslant 1$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ dont on déduit que $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ car $x^n \geqslant 0$.

Donc pour tout entier positif n et tout $x \in [0;1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$$

5) En intégrant l'encadrement de la question précédente, valable pour tout $x \in [0;1]$, sur le segment $[0;1]$, on obtient, pour tout entier positif n :
$\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$
d'où, pour tout entier positif n,
$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, positive, donc convergente, et en utilisant le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

6) D'après la question 3) : pour tout entier positif n,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = (-1)^n I_{2n} - \frac{\pi}{4}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = -(-1)^n I_{2n} + \frac{\pi}{4}$
Or d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

7) De même, d'après la question 3) : pour tout entier positif n,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} = (-1)^n I_{2n+1} - \frac{\ln(2)}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -2(-1)^n I_{2n+1} + 2\frac{\ln(2)}{2}$
Or d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$