Développements limités, suites, intégrales

Exercice 1.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \quad \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto \quad \dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{x} \end{cases}$.

On ne demande pas de justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

1) Le code suivant permet de représenter graphiquement f :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X= np.linspace(-3,3,2000)
f=lambda x:(np.sqrt(1+x**4)-1)/x
Y=f(X)
plt.plot(X,Y)
```

Recopier ce code dans Spyder et observer la représentation graphique de f.

2) Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 (autrement dit, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe et est finie).

Conformément au résultat de cette question, on prolonge f en 0 par sa limite en 0 : f ***est donc désormais une fonction définie sur*** $\mathbb{R}$.

4) Montrer que le prolongement obtenu à la question précédente est dérivable.

5) Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en 0 et la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

6) En effectuant un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$, montrer que f possède une asymptote oblique dont on donnera l'équation.

7) Montrer (le plus simplement possible) que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Le but de cet exercice est d'obtenir une expression des intégrales de Wallis $\boxed{W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t}$ puis de l'utiliser pour obtenir la limite d'une intégrale.

- Partie A - Préliminaire

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$.

- Partie B - Expression de W_n

1) Calculer $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\mathrm{d}t$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t$.

2) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t dt$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Pour les deux questions suivantes, on pourra utiliser le résultat de la partie préliminaire.

4) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

5) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, W_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
(indication : on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n...)

- Partie C - Équivalent de W_n

1) Montrer que $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin^2 t \leq \sin t \leq 1$.

2) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

3) En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que $W_n \sim W_{n+1}$.

4) En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$.

5) En déduire un équivalent de W_n.

- Partie D - Calcul de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u$.

1) Justifier l'existence de la fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u$.

2) Montrer que F est croissante et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq 0$.

3) Montrer que $\forall t \in [0; 1], 1 - t \leq e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t}$.

4) En posant $u = \sqrt{nt}$ (avec $n \in \mathbb{N}$), en déduire que
$\forall u \in \left[0; \sqrt{n}\right], \left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \dfrac{u^2}{n}\right)^{-n}$.

5) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \leq F\left(\sqrt{n}\right) \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u$.

6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \mathrm{d}t$.

7) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{n} \sin v$, montrer que
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \sqrt{n} W_{2n+1}$.

8) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{n} \tan v$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

9) En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$