Correction DM n°2

Exercice 1.

1) • Montrons que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Donc sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues et dérivables.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$.
Notamment, la fonction exp étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) > 0$.
Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc est injective.
Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ et sh étant impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.
Comme par ailleurs sh est continue, le théorème de la bijection continue permet d'affirmer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
Remarquons au passage, comme $\mathrm{sh}(0) = 0$ et que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que

$$\mathrm{sh}(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

• Montrons que ch est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$.
À nouveau, par définition de ch, ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et un calcul immédiat montre que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.
Or nous venons de voir que sh est strictement positive sur $]0; +\infty[$ donc ch est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc injective.
De plus ch est continue, $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection continue, ch est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$.

On note Argsh et Argch leurs bijections réciproques.
Le théorème de la bijection continue nous permet d'affirmer que Argsh et Argch sont continues et strictement croissantes sur leur ensemble de définition,
que Argsh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
et Argch une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

2) $\forall u \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(u) - \mathrm{sh}^2(u) = 1$.
Soit x un réel et posons $u = \mathrm{Argsh}(x)$.
On a donc $\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argsh}(x)) - \mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}(x)) = 1$
et par définition de Argsh, $\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}(x)) = x^2$.
Donc $\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argsh}(x)) = 1 + x^2$.
Enfin, comme $\mathrm{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que, pour tout réel x,

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x)) = +\sqrt{1 + x^2}$$

3) De même, en utilisant le fait que $\forall u \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(u) - \mathrm{sh}^2(u) = 1$ pour $u = \mathrm{Argch}(x)$ (avec, par

définition de Argch, x réel supérieur ou égal à 1), on obtient que

$$x^2 - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch}(x)) = 1$$

On en déduit que $\forall x \in [1;+\infty[, \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \pm\sqrt{x^2-1}$.
Enfin, $\operatorname{Argch}(x) \in [0;+\infty[$ (par définition de Argch) et sh est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\forall x \in [1;+\infty[, \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = +\sqrt{x^2-1}$$

4) • sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, donc Argsh est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh}(x)) \neq 0$.
Or $\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh}(x)) = \operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ ne s'annule jamais donc Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

• ch est une bijection de $[0;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$ dérivable sur $[0;+\infty[$ donc Argch est dérivable
en tout $x \in [1;+\infty[$ tel que $\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch}(x)) \neq 0$.
Or $\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch}(x)) = \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$ s'annule (sur $[1;+\infty[$) si et seulement si $x = 1$.
Donc Argch est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$,

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

5) Soit $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.
ch ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$, th est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x)\times\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\times\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.
Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(-x) = \dfrac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \dfrac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x)$.
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.
Finalement, th est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.
Notons $\operatorname{Argth} \in \mathcal{F}(]-1;1[,\mathbb{R})$ sa bijection réciproque.
D'après le théorème de la bijection continue, Argth est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$ et vérifie
$\lim\limits_{x\to-1} \operatorname{Argth}(x) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$) et
$\lim\limits_{x\to1} \operatorname{Argth}(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$).
Enfin, th étant dérivable sur $\mathbb{R}$, Argth est dérivable en tout $x \in]-1;1[$ tel que $\operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(x)) \neq 0$.
Or $\forall u \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(u) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(u)} = \dfrac{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = 1 - \operatorname{th}^2(u)$.
Donc, $\forall x \in]-1;1[, \operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(x)) = 1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{Argth}(x)) = 1 - x^2$ qui ne s'annule jamais sur $]-1;1[$.
Donc Argth est dérivable sur $]-1;1[$ et $\operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

6) Soit $x \in]-1;1[$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que $x = \text{th}(u)$.
On cherche une expression de Argth ce qui revient à exprimer u en fonction de x.

Or :
$$\begin{aligned} x = \text{th}(u) &\Leftrightarrow \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = x \\ &\Leftrightarrow e^{2u} - 1 = \left(e^{2u} + 1\right) x \\ &\Leftrightarrow e^{2u}(1 - x) = 1 + x \\ &\Leftrightarrow e^{2u} = \frac{1+x}{1-x} \\ &\Leftrightarrow u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Finalement
$$\forall x \in]-1;1[, \text{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

7) On démontre de même qu'à la question précédente que
$$\forall x \in [1;+\infty[, \text{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
Il y a cependant deux passages un peu délicats.
En effet, pour obtenir la première expression, on résout l'équation d'inconnue $u \in [0;+\infty[$:
$(E_1) \quad \text{ch}(u) = x$ avec $x \in [1;+\infty[$.
On montre aisément que cette équation est équivalente à
$$e^{2u} - 2xe^u + 1 = 0$$
que l'on résout en posant $U = e^u$ à l'aide de la méthode habituelle (discriminant, etc...).
Cette équation a ***deux solutions*** qui sont $u_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ et $u_2 = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$.
Pour conclure, il ***faut remarquer que*** $u_2 < 0$, donc n'appartient pas à l'ensemble $[0;+\infty[$ dans lequel on cherche l'antécédent de x.
En effet, $x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{x^2 - (x^2-1)}{x + \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \leqslant 1$ car $x \geqslant 1$ donc $x + \sqrt{x^2-1} \geqslant 1$.
Donc u_1 est ***l'unique solution répondant aux conditions imposées.***
Un raisonnement similaire doit aussi être fait pour obtenir l'expression de $\text{Argsh}(x)$.

Exercice 2.

1) $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ intervalle sur lequel tan est définie, dérivable et strictement positive.
Par composition, Gd est donc bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2) $\forall x \in I, \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.

- On obtient immédiatement la dernière relation en écrivant
$$\text{Gd}(x) = \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = 2\ln\sqrt{\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2\,\text{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

- De plus
$\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$
Donc $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right)$.
- Sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, cos est positive donc $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.
D'où : $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)}\right) = \mathrm{Argsh}(\tan x)$.
- Enfin,
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)+1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\right) = \mathrm{Argth}(\sin x)$.

3) $\forall x \in I, \mathrm{Gd}'(x) = (\mathrm{Argth}(\sin x))' = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

4) Gd étant définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Gd}'(x) > 0$, la fonction est strictement croissante et continue donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ et
$x = \mathrm{Gd}(u) \Leftrightarrow x = \mathrm{Argsh}(\tan u) \Leftrightarrow \mathrm{sh}(x) = \tan(u) \Leftrightarrow u = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))$.
Donc $\mathrm{Gd}^{-1}(x) = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))$.
On en déduit immédiatement, en dérivant l'expression précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\mathrm{Gd}^{-1}(x))' = \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$