

Logique, ensembles, applications

I. Éléments de logique

Ex. 2.1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Écrire chacune d'elles comme une implication.

- Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
- Une condition nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement supérieur à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
- Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il faut que son carré soit strictement supérieur à 4.

Ex. 2.2 **[**]** Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer (par l'absurde) que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Ex. 2.3 **[*]** On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Ex. 2.4 **[**]** On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

II. Ensembles et quantificateurs

Ex. 2.5

- Donner une définition par compréhension puis comme image directe de l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

- Donner une définition symbolique des ensembles suivants :

- $E = \{-28; -21; -14; -7; 0; 7; 14; 21; 28; 35\}$
- $F = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$

Ex. 2.6 Soit E un ensemble, A , B et C trois parties de E . Prouver les égalités suivantes :

$$\bullet \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \bullet \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \bullet A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Ex. 2.7 Donner comme réunion d'intervalles les parties de $\mathbb{R}$ constituées des valeurs de x vérifiant les assertions suivantes :

- $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$;
- $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$;
- $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$;
- $x \geq 0 \Rightarrow x > 3$.

III. Applications et fonctions

Ex. 2.8 Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x^2 - x - 1 \end{cases}$$

et calculer $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$.

Ex. 2.9 **[*]** Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow &]-1; 1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{1 + |x|} \end{cases}$.

Montrer que f est bijective et donner une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 2.10 **(Cor.)** **[*]** L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?

IV. Équations et systèmes

Ex. 2.11 Vrai ou faux ?

- Quel que soit la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'équation $mx = m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.
- Le système d'équations
$$\begin{cases} \frac{1}{2} - x - \frac{3y}{2} = 0 \\ 5(x + y) + 3 = 8 - 5x - 10y \end{cases}$$
 est équivalent à la seule équation $2x + 3y = 1$.

Ex. 2.12 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

- $(3x + 2)(x + 1) = -\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$
- $(2x + 1)(x - 3)(x + 2) - (2x + 1)(x - 7) = 0$
- $\ln(x + 1) - \ln(1 - x) = \ln 2$

Ex. 2.13 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel m :

$$(m + 1)x + 3 = 2mx + m^2 + 2m.$$

Ex. 2.14 Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} z - y = 1 \\ x - az = 2 \\ ay - x = 3 \end{cases}$$

Ex. 2.15 Donner la nature et si possible une équation paramétrique de l'ensemble des solutions des systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$:

$$S_1 : \begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ -8x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Ex. 2.16

- Résoudre et discuter suivant la valeur de $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$S_3 : \begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + ay + z = \beta \\ x + y + az = \gamma \end{cases}$$

- Généraliser le résultat à un système de 4 équations à 4 inconnues, 5 équations à 5 inconnues, etc..., n équations à n inconnues.

Ex. 2.17 Résoudre avec $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ le système d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ réelles suivant

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \\ x_1 + \dots + x_n = s \end{cases}$$

Corrections

Cor. 2.10 : L'application n'est ni injective, ni surjective.

En effet, $f(1, 2) = (3, 2) = f(2, 1)$ donc l'application n'est pas injective.

De plus, montrons qu'il n'existe pas de couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$ et $xy = 1$. Comme le produit $xy \neq 0$, x et y sont non nuls. On a donc :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Or l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est pas surjective.