Programme de colles n°18

Du 12 au 16 février

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Donner les espaces vectoriels de référence.
   Réponse attendue : $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$), $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A, E)$, $\mathcal{L}(E, F)$ où $n, p \in \mathbb{N}^*$, E et F deux e.v., A une partie quelconque de $\mathbb{R}$.
2) Définition d'un sous-espace vectoriel. Énoncer le théorème fondamental (12.5).
3) Étant donnée une famille (finie) $\mathcal{U}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, .)$, donner la définition de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$.
   Propriété de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$? (proposition 12.6)
4) Soit E un e.v. et F et G deux s.e.v. de E. Définition de la somme $F + G$.
   Démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.
5) Avec les mêmes hypothèses, démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
6) Quand dit-on que la somme de deux sous-espaces vectoriels est directe ?
   Caractérisation de la somme directe par l'intersection.
   Définition des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
7) Définition des applications linéaires. Que peut-on dire de la composée de deux applications linéaires ? de la bijection réciproque d'une application linéaire bijective ?
8) Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Principales propriétés (théorème 12.20).
9) ***Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.***
   Définition géométrique de la projection sur F parallèlement à G.
   Caractérisation algébrique des projections. Expression de F et G comme noyaux d'applications linéaires.
10) ***Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.***
    Définition géométrique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
    Caractérisation algébrique des symétries. Expression de F et G comme noyaux d'applications linéaires.
11) ***Donner $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ (ou un autre s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ similaire, au choix du colleur) sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille.***

Programme pour les exercices : sur 15 points

Espaces vectoriels : e.v. de référence, s.e.v., e.v. engendré par une famille, intersection de s.e.v., somme de s.e.v., somme directe/s.e.v. supplémentaires, applications linéaires.

Noyau et image d'une application linéaire, injectivité/surjectivité/bijectivité. Projections et symétries.