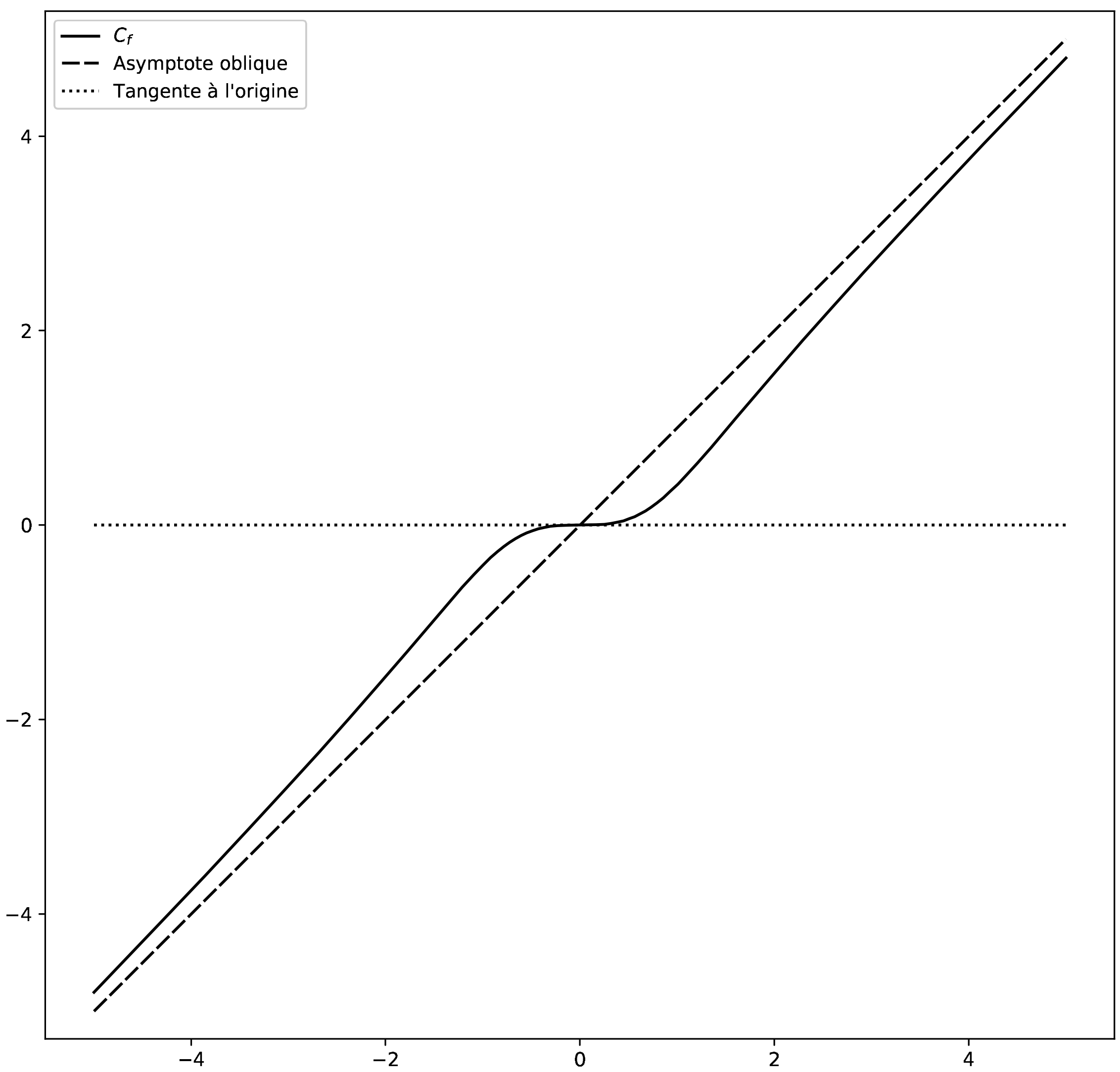
Correction DM n°3

Exercice 1.

1)



2) $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)}{x} = \dfrac{1+\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)-1}{x} = \dfrac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

3) f possède un développement limité à l'ordre 3 (donc à un ordre supérieur ou égal à 1) en 0. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (terme constant du développement limité).

4) De plus, ce prolongement est dérivable et $f'(0)=0$ (coefficient du terme de degré 1 du

développement limité).

5) L'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$ est donc $y=0$ et $f(x)=\dfrac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$ est du signe de x^3 au voisinage de 0.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 0^+
et $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente en 0^-.

6) Développement asymptotique : on pose $h=\dfrac{1}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$.

$$\begin{aligned} f(x)=f\left(\tfrac{1}{h}\right) &= \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{h^4}}-1\right)}{\frac{1}{h}} \\ &= h\times\frac{1}{\sqrt{h^4}}\left(\sqrt{h^4+1}-h^2\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{h^4}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^4)-h^2\right) \\ &= \tfrac{1}{h}-h+\frac{h^3}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^3) \end{aligned}$$

Donc $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
Donc la droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

7) f est une fonction impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0;+\infty[$.
De plus f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (car $f(x)=x+\underset{x\to+\infty}{o}(x)$ au voisinage de $+\infty$).
Donc $f([0;+\infty[)=[0;+\infty[$, et comme f est impaire, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.
Donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective. La fonction étant continue, ceci équivaut à montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0, et

$$\forall x>0,\ f'(x)=\frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}x-\sqrt{1+x^4}+1}{x^2}=\frac{x^4-1+\sqrt{1+x^4}}{x^2\sqrt{1+x^4}}\geqslant\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}>0.$$

Donc $f'\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annule qu'en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective.
f est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

- Partie A - Préliminaire

Par récurrence :
Initialisation : pour $n=0$, le produit du membre gauche est vide donc vaut 1 et $\dfrac{2^0(0!)^2}{(0)!}=1$.

Pour $n=1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}\frac{2k}{2k-1}=\frac{2}{2-1}=2$ et $\dfrac{2^2(1!)^2}{(2)!}=\dfrac{4}{2}=2$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n et démontrons la au rang $n+1$.

$$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k}{2k-1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\times\frac{2n+2}{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\times\frac{2(n+1)\times 2(n+1)}{(2n+1)\times(2n+2)}=\frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}.$$

La propriété est initialisée en $n = 0$ (et $n = 1$), elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Partie B - Expression de W_n

1) $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

2) $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \times \sin(t)\mathrm{d}t$

$W_{n+2} = \left[\sin^{n+1}(t) \times (-\cos(t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(t)\sin^n(t) \times (-\cos(t))\mathrm{d}t$

donc $W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t.$

3) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)\sin^n t\mathrm{d}t \quad \text{donc} \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

$W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ ou encore $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n.$

4) La question précédente permet d'affirmer que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$W_{2k} = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \times W_0.$

En utilisant la partie préliminaire, on obtient donc $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}.$

5) De même qu'à la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$W_{2k+1} = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} \times W_1 = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j-1} \times \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j+1}.$

Le second produit est télescopique, donc en utilisant la partie préliminaire, on obtient

$W_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} \times \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}.$

6) Si n est pair, autrement dit $n = 2k, k \in \mathbb{N}$,

$W_nW_{n+1} = W_{2k}W_{2k+1} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \dfrac{\pi}{2(2k+1)} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}.$

Si n est impair, autrement dit $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$,

$W_nW_{n+1} = W_{2k+1}W_{2k+2} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \times \dfrac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2k+2)\pi}{4(k+1)^2 \times 2} = \dfrac{\pi}{2(2k+2)} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}.$

Dans les deux cas on a bien, $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}.$

- Partie C - Équivalent de W_n

1) $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin t \leq 1$, notamment on peut multiplier l'inégalité par $\sin t \geq 0$ sans changer son sens :

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin^2 t \leq \sin t \leq 1.$

2) Les inégalités de la question précédente, valables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, permettent d'écrire (après multiplication par $\sin^n(t) \geq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire,
$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.
Comme par ailleurs, $\forall t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, \sin^n(t) > 0$ et comme la fonction sin est continue, $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$.
On en déduit donc en divisant par $W_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

3) Montrons d'abord que $W_n \sim W_{n+2}$: d'après B-3), on a $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n \Rightarrow$ $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \dfrac{n+1}{n+2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ qui est la définition de $W_n \sim W_{n+2}$.
En utilisant la question précédente à présent, on a alors par le théorème des gendarmes $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $W_n \sim W_{n+1}$.

4) D'une part, d'après B-6), $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. D'autre part d'après la question précédente, $W_n \sim W_{n+1}$. Donc,
$W_n^2 \sim W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$ ce qu'il fallait démontrer.

5) Aucune règle du cours ne concerne les « racines carrées d'équivalents » mais la question précédente nous permet de penser que $W_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$. Démontrons le :
Comme $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}}} = 1$ donc
$W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

- Partie D - Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$.

1) La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental du calcul différentiel, $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$ existe et est l'unique primitive de $u \mapsto e^{-u^2}$ s'annulant en 0.

2) $u \mapsto e^{-u^2}$ est positive pour tout $u \in \mathbb{R}$ donc sa primitive est croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $F(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq F(0) = 0$.

3) Étudions la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t} - 1 + t$ qui est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(t) = -e^{-t} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0$ donc f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.
Comme de plus, $f(0) = 1 - 1 = 0$, f passe par son minimum 0 en 0 et
$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t \leq e^{-t}$.
Il s'agit maintenant de démontrer la seconde partie de l'inégalité : $\forall t \in [0;1], e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t} \Leftrightarrow$ $\forall t \in [0;1], 1 + t \leq e^t \Leftrightarrow \forall t \in [-1;0], 1 - t \leq e^{-t}$ ce que nous venons de démontrer.
Donc $\forall t \in [0;1], 1 - t \leq e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t}$.

4) Posons $u = \sqrt{nt}$ donc $t = \dfrac{u^2}{n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$) dans l'inégalité précédente :

$\forall u \in \left[0;\sqrt{n}\right], 1-\dfrac{u^2}{n} \leq e^{-\dfrac{u^2}{n}} \leq \dfrac{1}{1+\dfrac{u^2}{n}}$.

Cette inégalité concerne des termes qui sont tous positifs et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc en élevant à la puissance n :

$\forall u \in \left[0;\sqrt{n}\right], \left(1-\dfrac{u^2}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\dfrac{u^2}{n}}\right)^n = e^{-u^2} \leq \left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n$.

5) L'inégalité de la précédente question est vérifiée pour tout $u \in \left[0;\sqrt{n}\right]$ donc en utilisant la croissance de l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\mathrm{d}u \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u$ où on reconnaît $F\left(\sqrt{n}\right)$ dans le membre central.

6) Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
Effectuons le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$, $t = \frac{\pi}{2} - s$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$.
$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(s)\mathrm{d}s$ car $\forall s \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2}-s\right) = \cos(s)$.

7) Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{n}\sin v$, $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\cos v\mathrm{d}v$:
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{n\sin^2 v}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos v\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 v\right)^n \sqrt{n}\cos v\mathrm{d}v = \sqrt{n}W_{2n+1}$
d'après le résultat de la question précédente.

8) $u = \sqrt{n}\tan v$, $\mathrm{d}u = \sqrt{n} \times \dfrac{1}{\cos^2 v} \times \mathrm{d}v$:
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{n\tan^2 v}{n}\right)^{-n} \sqrt{n} \times \frac{1}{\cos^2 v} \times \mathrm{d}v = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 v\right)^{n-2} \mathrm{d}v \leq$
$\sqrt{n}W_{2n-2}$ car l'intégrande est positive donc l'intégrale croissante.

9) D'après la question 2), nous savons que F est croissante donc
$\forall x \in \left[\sqrt{n};\sqrt{n+1}\right], F\left(\sqrt{n}\right) \leq F(x) \leq F\left(\sqrt{n+1}\right)$.
Or, d'après les questions 5), 7) et 8), nous savons de plus que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq F\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$.
On a donc, $\forall x \in \left[\sqrt{n};\sqrt{n+1}\right]$, $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq F(x) \leq \sqrt{n+1}W_{2n}$.

Enfin, d'après C-5), $\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \sqrt{n+1}W_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2\times 2n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Donc par application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.