

Continuité

I. Fonctions : généralités, limites, équivalents

Ex. 13.1 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[$ et exprimer $f^{-1}(y)$ pour $y \in]-1; 1[$.

Ex. 13.2 $[*]$ Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et f bijective et impaire de I dans $J \subset \mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est impaire.

Ex. 13.3 Déterminer les limites suivantes

- a. $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$ en $+\infty$ pour $a, b \in \mathbb{R}$
- b. $\frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ en 0
- c. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0
- d. $\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ en $+\infty$

Ex. 13.4 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x - \sqrt{x}}}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) x$

Ex. 13.5 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + 1} + \frac{\pi}{6}\right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe-t-elle? Si oui, quelle est sa valeur?

Ex. 13.6 Soit $a > 0, a \neq 1$.
Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $f(x) = (a+x)^a - a^{a+x}$.

Ex. 13.7 (Cor.) Donner un équivalent simple des expressions suivantes :

- $f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)}$ au voisinage de 0^+ ;
- $g(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 13.8

- a. Montrer que l'équation $x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{x}$ admet une unique racine sur l'intervalle $[n; n+1[$ pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $x_n \in [n; n+1[$ cette racine.
- b. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ puis trouver un équivalent u_n de $x_n - n$ au voisinage de $+\infty$.
- c. Trouver un équivalent de $x_n - n - u_n$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 13.9 Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et toutes les asymptotes à leurs représentations graphiques :

- $f(x) = \ln(1 + 3e^x)$;
- $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}$;
- $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + x}$;
- $k(x) = \ln(\text{sh}(x))$;
- $l(x) = \ln(\text{ch}(x))$.

II. Continuité

Ex. 13.10 Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $\begin{cases} x \neq 0 & \mapsto ax \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \\ 0 & \mapsto a^2 \end{cases}$ est-elle continue en 0?

Ex. 13.11 Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes :

- (1) $x \mapsto \sqrt{|x-1|}$
- (2) $x \overset{f}{\mapsto} \lfloor x \rfloor$
- (3) $x \overset{h}{\mapsto} \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
- (4) $\begin{cases} x \neq 0 & \overset{k}{\mapsto} k(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \\ 0 & \mapsto k(0) = 0 \end{cases}$

Ex. 13.12 La fonction $x \neq 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

Étudier cette fonction (ou son prolongement par continuité s'il existe) et tracer sa représentation graphique.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Ex. 13.13 Montrer que l'équation $x^2 \cos(x) + x \sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13.14 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13.15 Soit a et b deux réels strictement positifs, $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $af(0) + bf(1) = (a+b)f(c)$.

Ex. 13.16 [**Problème du moine**] Un moine part de son monastère à 7h00 du matin et se rend au sommet du Mont Sinai. Il y arrive à midi. Il passe la nuit sur place, puis le lendemain repart du sommet à 7h00, suit exactement le même chemin que la veille et arrive au monastère à midi.

Existe-t-il un endroit se situant sur son chemin où il serait passé à la même heure à l'aller et au retour ?

Ex. 13.17 [**Problème du cycliste**] Un cycliste parcourt 20km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a effectué exactement 10km.

Ex. 13.18 **[**]** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. On note $\alpha = f(1)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

Ex. 13.19 **[**]** Refaire l'exercice 13.18 en ne supposant plus que la continuité de f en 0.

Ex. 13.20 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que $f < g$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0; 1], f(x) + m \leq g(x)$.

IV. Divers

Ex. 13.21 Soit f définie par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Domaine de définition de f ?
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Ex. 13.22 (**Cor.**) Soient $r \in \mathbb{R}_+^*, f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x + \frac{r}{x}}{2}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- Montrer que $[\sqrt{r}; +\infty[$ est stable par f et en déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{r}$.
- Montrer que $g : x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $[\sqrt{r}; +\infty[$.
- En déduire que u est décroissante à partir du rang 1 et que u converge.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$.

V. Correction

Cor. 13.7 :

- $x^x = e^{x \ln(x)} = 1 + x \ln(x) + \frac{x^2 \ln^2(x)}{2} + \frac{x^3 \ln^3(x)}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ car $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ d'une part, et car le terme suivant $\frac{x^4 \ln^4(x)}{24}$ est négligeable devant x^3 au voisinage de 0.
De même, comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,
 $\sin(x)^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \ln\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 \ln^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{2} +$

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 \frac{\ln^3\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

$$\text{Or } \ln\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \ln(x) - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2), \text{ donc :}$$

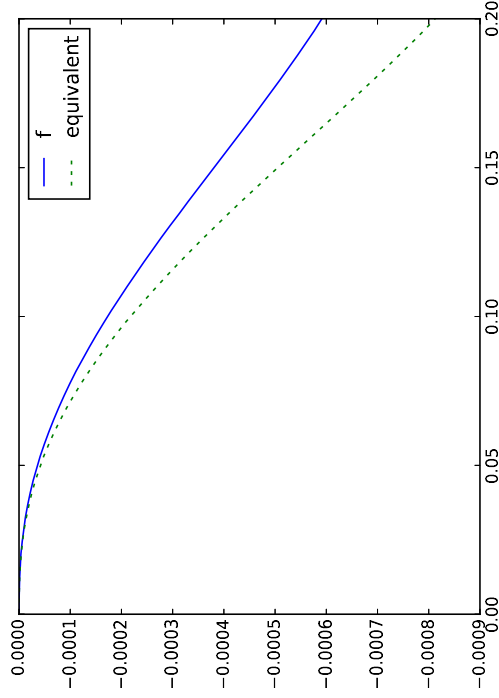
$$\sin(x)^{\sin(x)} = 1 + \underbrace{\left[x \ln(x) - \frac{x^3}{6} \ln\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right]}_{\text{issu du terme } \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \ln\left(x - \frac{x^3}{6}\right)} + \frac{x^2 \ln^2(x)}{2} + \frac{x^3 \ln^3(x)}{6} +$$

$$o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

On en déduit que :

$$x^x - \sin(x)^{\sin(x)} = \frac{x^3 \ln(x)}{6} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

$$\text{Donc } x^x - \sin(x)^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3 \ln(x)}{6}$$



Cor. 13.22 :

a. f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \frac{r}{x^2}}{2} x^2 - r = \frac{x^2 - r}{2x^2}.$$

Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > r \Leftrightarrow (x > \sqrt{r} \text{ ou } x < -\sqrt{r})$.

Sur $]0; \sqrt{r}[$, f est donc décroissante et f est croissante sur $[\sqrt{r}; +\infty[$.

Or $f(\sqrt{r}) = \sqrt{r}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et f est continue, donc

$$f([\sqrt{r}; +\infty[) = [\sqrt{r}; +\infty[$$

De plus f passe par son minimum (sur $\mathbb{R}_+^*$) $\sqrt{r}$ en $\sqrt{r}$. Donc $\forall x > 0, f(x) \geq \sqrt{r}$.

Donc $u_1 = f(u_0) \geq \sqrt{r}$, et $[\sqrt{r}; +\infty[$ est stable par f , donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{r}$.

b. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{x}{2} - x = \frac{r - x^2}{2x} \text{ est négatif sur } [\sqrt{r}; +\infty[.$$

c. $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$.

Or pour $n \geq 1, u_n \in [\sqrt{r}; +\infty[$ donc $g(u_n) \leq 0$.

Donc u est décroissante à partir du rang 1.

De plus $\forall n \geq 1, u_n \geq \sqrt{r} : u$ est décroissante et minorée à partir du rang 1, donc elle converge.

d. Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

f est continue, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.

Donc $f(l) = l : l$ est un point fixe de f .

Or l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = r$ possède une unique solution positive, c'est $\sqrt{r}$.

Donc $l = \sqrt{r}$.

e. Pour donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$, on calcule les termes de u - qui sont rationnels - jusqu'à obtenir une approximation suffisante.

$$u_1 = \frac{2}{3}.$$

$$u_2 = \frac{17}{17}.$$

$$u_3 = \frac{12}{577}.$$

$$u_4 = \frac{408}{665857}.$$

qui est déjà une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 2.10^{-6} près.

$u_4 = \frac{408}{665857}$ est une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ qui convient puisqu'elle est non seulement valable à 10^{-6} près, mais en fait approxime $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.