

# Nombres complexes

## I. Définitions



### Axiome 3.1

Il existe un nombre  $i$  ayant la propriété  $i^2 = -1$ .



### Remarque

$i \notin \mathbb{R}$  puisque le carré de tout nombre réel est positif.



### Définition 3.2

On appelle **nombre imaginaire** le produit de  $i$  par un nombre réel et **nombre complexe** la somme d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire.

Autrement dit, **un nombre complexe  $z$  peut toujours s'écrire sous la forme**

$$z = a + ib, \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique** du nombre complexe.



### Notation

On note  $i\mathbb{R}$  l'ensemble  $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$  des nombres imaginaires.

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble  $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$  des nombres complexes.

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on note  $a = a + 0i$  (réel pur),  $ib = 0 + ib$  (imaginaire pur) et  $0 = 0 + 0i$ .

On peut donc écrire  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et  $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ .



### Axiome 3.3

L'addition et la multiplication des nombres complexes vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication des nombres réels, à ceci près que

$$i^2 = \dots$$

En particulier, les techniques de calcul des sommes finies du chapitre 1 restent valables pour des familles de nombres complexes, tout comme les identités remarquables.

**Ex. 3.1** Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique ( $a$  et  $b$  sont des nombres réels,  $n$  un entier naturel) :

$$\begin{array}{llll} A = i^3 & B = i^4 & C = i^5 & D = i^n \\ E = (1 + 2i) \times \frac{3 + 4i}{5} & F = (a + ib)(a - ib) & G = (1 - i)^4 & H = \frac{a + ib}{6 - 8i} \end{array}$$

**Ex. 3.2** Simplifier les expressions suivantes ( $a$  et  $b$  sont des nombres réels) :

$$\begin{array}{llll} A = (1 + i)^2 & B = (1 + i)^4 & C = (2 + i)(3 - i) & D = (1 + i)^2 + (1 - i)^2 \\ E = (1 + i)(1 - i) & F = (3 - 4i)(3 + 4i) & G = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \times (a + ib) & H = (1 + i\sqrt{3})^6 \end{array}$$

**Définition 3.4**

Étant donné un nombre complexe  $z = a + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$  on appelle

- **conjugué** de  $z$  le nombre complexe  $\bar{z} = a - ib$ ;
- **module** de  $z$  le nombre réel  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ ;
- **partie réelle** de  $z$  le nombre réel  $\operatorname{Re}(z) = a = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ;
- **partie imaginaire** de  $z$  le nombre réel  $\operatorname{Im}(z) = b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

**Propriété 3.5**

Quels que soient  $z, z' \in \mathbb{C}$  on a :

- |                                                                                       |                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$                                           | 8) $z = 0 \Leftrightarrow  z  = 0$                                  |
| 2) $\overline{-z} = -\bar{z}$                                                         | 9) $z\bar{z} =  z ^2$                                               |
| 3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$                                 | 10) Si $z \neq 0$ , $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$           |
| 4) Si $z' \neq 0$ , $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ | 11) $ \bar{z}  =  z  =  -z $                                        |
| 5) $\overline{\bar{z}} = z$                                                           | 12) $ z \times z'  =  z  \times  z' $                               |
| 6) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$                                     | 13) Si $z' \neq 0$ , $\left \frac{z}{z'}\right  = \frac{ z }{ z' }$ |
| 7) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$                                   |                                                                     |

**Méthode : Parties réelles et imaginaires**

Pour obtenir la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre complexe, les formules  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  et  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  peuvent s'avérer **extrêmement efficaces**.

Pour montrer qu'un nombre complexe  $z$  est réel, on montre que  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0$  c'est-à-dire que  $\bar{z} = z$ .

Pour montrer qu'un nombre complexe  $z$  est imaginaire, on montre que  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = 0$  c'est-à-dire que  $\bar{z} = -z$ .

**Ex. 3.3** On considère deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  de module 1 tels que  $z_1 z_2 \neq -1$ . Montrer que  $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$ .

**Cor. 3.3****Théorème 3.6 (Première inégalité triangulaire)**

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$ , avec égalité si et seulement si  $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$ .

**Théorème 3.7 (Seconde inégalité triangulaire)**

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$



### Définition 3.8

On appelle **affixe** du point  $M(a; b)$  ou du vecteur  $\vec{u}(a; b)$  le nombre complexe  $z = a + ib$ .



### Notation

Étant donnés  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , on note :

$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$  le **disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon  $r$**  ;

$\overline{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$  le **disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon  $r$**  ;

$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$  le **cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r$** .

Notamment,  $|z - z_0|^2 = r^2$  est **une équation cartésienne du cercle de centre  $C(z_0)$  et de rayon  $r$** .

**Ex. 3.4** Donner une équation cartésienne du cercle de centre  $A(3; -1)$  et de rayon 3.

### Cor. 3.4

### Propriété 3.9 (R-linéarité des parties réelle et imaginaire)

Les fonctions  $\mathcal{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathcal{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  sont **R-linéaires** c'est-à-dire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} \mathcal{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) &= \lambda \mathcal{Re}(z_1) + \mu \mathcal{Re}(z_2) \\ \mathcal{Im}(\lambda z_1 + \mu z_2) &= \lambda \mathcal{Im}(z_1) + \mu \mathcal{Im}(z_2) \end{cases}$$

« **Essentiellement, les calculs avec les nombres complexes suivent les mêmes règles que ceux avec les nombres réels** ».

- $0 \in \mathbb{C}$  : il existe un **élément neutre pour l'addition** vérifiant  $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, z + z' = 0$  : tout complexe possède un **symétrique** pour l'addition  
 $z'$  est noté  $-z$  et appelé **opposé** de  $z$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$  : l'addition complexe est **commutative**
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$  : l'addition complexe est **associative**
- $1 \in \mathbb{C}$  : il existe un **élément neutre pour la multiplication** vérifiant  $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C}^*, z \times z' = 1$  : tout complexe non nul possède un **symétrique** pour la multiplication  
 $z'$  est noté  $z^{-1} = \frac{1}{z}$  et appelé **inverse** de  $z$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z \times z' = z' \times z$  : la multiplication complexe est **commutative**
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'') = z z' z''$  : la multiplication complexe est **associative**
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$  : la multiplication complexe est **distributive** sur l'addition complexe

**Définition 3.10 (Structure de corps)**

Pour résumer l'ensemble de ces propriétés, on dit que  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un **corps** : cela signifie très exactement que *l'ensemble des nombres complexes possède une addition et une multiplication internes* qui vérifient les propriétés que nous venons de donner.

**II. Nombres complexes de module 1****Notation**

On note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1, autrement dit

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

$\mathbb{U}$  a notamment pour éléments 1,  $i$ ,  $-1$  et  $-i$ .

**Propriété 3.11**

L'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1 vérifie les propriétés :

- le produit de deux éléments de  $\mathbb{U}$  est un élément de  $\mathbb{U}$  ;
- il existe dans  $\mathbb{U}$  un élément neutre pour la multiplication (c'est 1) ;
- tout élément de  $\mathbb{U}$  possède un inverse dans  $\mathbb{U}$  ;
- la multiplication est commutative et associative.

**Définition 3.12**

On résume les propriétés précédentes en disant que  $(\mathbb{U}, \times)$  est un **groupe commutatif**.

**Proposition 3.13**

Tout nombre complexe non nul s'écrit de façon unique comme produit d'un réel strictement positif et d'un nombre complexe de module 1 :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists!(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}, z = ru.$$

**Ex. 3.5** Écrire les nombres complexes suivantes sous la forme  $ru$  où  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $u \in \mathbb{U}$  :

$$A = 3 + 3i \quad B = -3 - 3i \quad C = -3 + 4i \quad D = 12 - 5i$$

**Proposition 3.14 (Existence des arguments)**

Pour tout élément  $u$  de  $\mathbb{U}$ , il existe une infinité de valeurs  $\theta \in \mathbb{R}$  telles que  $u = \cos \theta + i \sin \theta$ . De plus, deux quelconques de ces valeurs diffèrent d'un multiple entier de  $2\pi$ .

**Définition 3.15 (Arguments d'un nombre complexe non nul)**

Les deux propositions précédentes nous permettent d'affirmer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! \rho \in \mathbb{R}_+, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique de  $z$**  dans laquelle  $\rho$  est le module de  $z$  et  $\theta$  est **un argument** de  $z$ .

**Définition 3.16 (Argument principal)**

Pour un nombre complexe non nul, la proposition 3.14 affirme l'existence d'une infinité d'arguments, différant entre eux d'un multiple entier de  $2\pi$ .

On dit que l'argument est défini **à  $2\pi$  près** ou encore **modulo  $2\pi$** .

On appelle **argument principal** l'unique argument compris dans l'intervalle  $] - \pi; \pi]$ .

**Notation**

On note  $\arg(z)$  tout argument d'un nombre complexe non nul et  $\text{Arg}(z)$  l'argument principal de  $z$ . Pour signifier que  $\arg(z)$  est défini à  $2\pi$  près, on écrira

$\arg(z) \equiv \text{Arg}(z) [2\pi]$  qui se lit « tout argument de  $z$  est **congru** à son argument principal modulo  $2\pi$  » **ce qui équivaut à**  $\exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi$ .

**Notation**

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ , on note  $e^{i\theta}$  le nombre complexe  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \in \mathbb{U}$ .

$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$ , on note  $e^z$  le nombre complexe  $e^z = e^a e^{ib} \in \mathbb{C}^*$ .

**Propriété 3.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)**

$\forall (\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2, \forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 :$

- |                                                                              |                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| • $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$                  | • $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$                                 |
| • $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$                                     | • $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$                                       |
| • $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$                 | • $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$                                |
| • $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi$ | • $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi$ |
| • $\Leftrightarrow \theta \equiv 0 [2\pi]$                                   | • $\Leftrightarrow z \equiv 0 [2i\pi]$                           |
| • $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$  | • $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z' [2i\pi]$             |

**Important !**

**Il n'existe pas de logarithme complexe !**

**Corollaire 3.18**

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$  et  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

**Méthode : Obtention de la forme trigonométrique d'un complexe non nul**

La démonstration de la proposition 3.14 fournit une méthode pour l'obtention de la forme trigonométrique d'un nombre complexe  $z$  non nul :

- 1) on commence par calculer  $r = |z|$  puis on écrit  $z$  sous la forme  $z = ru$  où  $u$  est de module 1 ;
- 2) on cherche ensuite  $\phi \in [0; \pi]$  tel que  $\text{Re}(u) = \cos(\phi)$  ; on verra au chapitre 6 comment obtenir cette valeur dans le cas général.
- 3) enfin, si  $\text{Im}(u) \geq 0$  alors  $\theta = \text{Arg}(z) = \phi$ ,

sinon  $\operatorname{Im}(u) < 0$  et  $\theta = \operatorname{Arg}(z) = -\phi$ .

On en conclut que  $z = |z|e^{i\theta}$ .

Il est fréquent que l'on utilise en physique une méthode similaire faisant intervenir la fonction Arctan et le signe de  $\operatorname{Re}(z)$  (voir chapitre 6).

**Ex. 3.6** Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$A = 3 + 3i \quad B = -3 - 3i \quad C = -3 + \sqrt{3}i \quad D = 1 - \sqrt{3}i$$

**Ex. 3.7** On pose  $z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

Calculer  $z^2$  et en déduire la valeur de  $\Theta = \operatorname{Arg}(z)$ .

**Cor. 3.7**

**Ex. 3.8** Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$

$$(E) : \bar{z} = z^3$$

**Cor. 3.8**

### III. Utilisations en trigonométrie

#### Proposition 3.19 (Formules d'Euler)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

#### Proposition 3.20 (Formule de Moivre)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

**Ex. 3.9** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $A = \left( \frac{1 - \sqrt{3}i}{-1 + i} \right)^{50}$ .

**Cor. 3.9**

```
>>> ((1-(3**0.5)*1j)/(-1+1j))**50
(29058990.52155743-16777215.999999903j)
```



#### Méthode : Somme de deux complexes de même module

Pour écrire sous forme trigonométrique la somme de deux complexes de même module, on

« **factorise par l'angle moitié** » :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left( e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\theta'}{2}} \right) = 2 \cos \left( \frac{\theta-\theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Il s'agit de la forme trigonométrique si  $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) > 0$ . Sinon, on obtient la forme trigonométrique en écrivant  $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\pi}$  avec  $-\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \geq 0$ .

**Ex. 3.10** Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes  $z = 1 + e^{i\theta}$  et  $Z = 1 - e^{i\theta}$  où  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ .

**Cor. 3.10**



**Méthode : Développement de  $\cos(nx)$  et  $\sin(nx)$  en polynômes trigonométriques**

Pour obtenir pour tout entier  $n$  et tout réel  $x$  les expressions de  $\cos(nx)$  et  $\sin(nx)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$  on utilise la formule 3.20 de Moivre et la formule du binôme de Newton.

**Ex. 3.11** Écrire pour  $x$  réel  $\cos(3x)$ ,  $\sin(3x)$ ,  $\cos(4x)$  et  $\sin(4x)$  en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

**Cor. 3.11**



**Méthode : Linéarisation des polynômes trigonométriques**

Réciproquement, pour transformer, pour  $x \in \mathbb{R}$ , des produits de  $\cos x$  et  $\sin x$  en sommes de cosinus et de sinus d'un multiple entier de  $x$ , on utilise les formules 3.19 d'Euler et la formule du binôme de Newton.

**Ex. 3.12** Linéariser  $\cos^2(x)$ ,  $\cos(x)\sin(x)$ ,  $\sin^2(x)$ ,  $\cos^3(x)$ ,  $\sin^3(x)$ ,  $\cos(a)\cos(b)$ ,  $\sin(a)\sin(b)$  et  $\cos(a)\sin(b)$ .

**Cor. 3.12**



**Méthode : Factorisation de certaines sommes trigonométriques**

Une expression faisant intervenir une somme de fonctions trigonométriques peut parfois être simplifiée en écrivant  $\cos x$  et  $\sin x$  comme parties réelle et imaginaire de  $e^{ix}$  puis en factorisant l'expression obtenue.

**Ex. 3.13** Simplifier pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$

et  $B_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ .

**Cor. 3.13**

**Ex. 3.14** Factoriser pour  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $A = \cos(p) + \cos(q)$  et  $B = \sin(p) - \sin(q)$ .

**Cor. 3.14**