Espaces vectoriels, continuité, polynômes, calcul matriciel

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Soit n un entier naturel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.
   Énoncer la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre n au voisinage de 0.
2) Résoudre l'équation $(E) : z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$
   Remarque : on pourra utiliser le fait que $\sqrt{289} = 17$.

Exercices

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 2.

Soit $P_1 = 1$, $P_2 = X + 3$, $P_3 = (X+3)^2$ et $P_4 = (X+3)^3$.
Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}$.

1) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Étudier les variations de f.
3) Montrer que la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ possède deux asymptotes obliques dont on donnera une équation.
4) Donner la position de $\mathcal{C}_f$ relativement à chacune de ses asymptotes.
5) Donner une ébauche grossière de $\mathcal{C}_f$.
   On ne demande pas de calculs approchés de valeurs particulières de $f(x)$. En revanche, on

fera apparaître les asymptotes obliques obtenues aux questions précédentes et les tangentes verticales à $\mathcal{C}_f$ s'il y en a.

Exercice 4.

Soit $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1 \in \mathbb{R}[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$..

1) Montrer que P_n est divisible par $(X-1)$ et par $(X-2)$.
   On note Q_1 et Q_2 les quotients.
2) Montrer que P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient vaut $Q_2 - Q_1$.
3) Montrer que
$$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= ((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + ... - (X-2) + 1) \\ &\quad + ((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + ... + (X-1) + 1) \end{aligned}$$

Exercice 5.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: autrement dit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
Soit F le sous-ensemble des fonctions de E qui sont paires.
Soit G le sous-ensemble des fonctions de E qui sont impaires.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Montrer que la seule fonction de E à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
3) Montrer par analyse/synthèse que quelle que soit la fonction $f \in E$, il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$.
4) Déduire des deux questions précédentes que $E = F \oplus G$.
5) Applications numériques : expliciter les fonctions P_f et I_f de la question 3) pour
   a) $f = \exp$;
   b) $f = x \mapsto 2 - 3x + 5x^2 + x^3$;
   c) $f = x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Exercice 6.

Soit f une fonction définie ***et continue*** sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose de plus qu'il existe un réel a tel que $f \circ f(a) = a$.
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = c$.
Dans ce qui suit, a est un réel tel que $f \circ f(a) = a$ et on note $b = f(a)$.

1) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b > a$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = c$.
2) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b < a$.
   Montrer qu'il existe $c \in]b; a[$ tel que $f(c) = c$.
3) Conclure.

Exercice 7.

Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de F.

1) Montrer que si $u \circ u$ est l'application nulle, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2) L'implication de la question précédente est-elle une équivalence ?
3) Donner un exemple d'endomorphisme u ***non nul*** de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $u \circ u = 0$.