Correction DS n°4

Exercice 1.

Par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 4 & 5 & 2 & y \\ 2 & 3 & 1 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & -2 & y-4x \\ 0 & -1 & -1 & z-2x \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & z-2x \\ 0 & -3 & -2 & y-4x \end{pmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & z-2x \\ 0 & 0 & 1 & y-4x-3z+6x \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & x-2x-y+3z \\ 0 & 1 & 0 & 2x-z-2x-y+3z \\ 0 & 0 & 1 & 2x+y-3z \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x-y+3z+2y-4z \\ 0 & 1 & 0 & -y+2z \\ 0 & 0 & 1 & 2x+y-3z \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

Donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

- P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 donc appartiennent à $\mathbb{R}_3[X]$.
  Donc, par théorème du cours, $\text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
  Donc $\text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4) \subset \mathbb{R}_3[X]$.
- Prouvons l'inclusion réciproque : soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
  D'après la formule de Taylor pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 :
  $$P = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(3)}{k!}\,(X-3)^k = P(3) \times P_1 + P'(3) \times P_2 + \frac{P''(3)}{2} \times P_3 + \frac{P'''(3)}{6} \times P_3$$
  Donc $P \in \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$.
  Donc $R_3[X] \subset \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$.
- Par double-inclusion, on a donc bien
  $$\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$$

Exercice 3.

1) $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2 - x - 1 \geqslant 0$.
$\Delta = 1 - 4 \times (-1) = 5$.
$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc f est définie sur $\mathcal{D}_f = \left]-\infty ; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$.

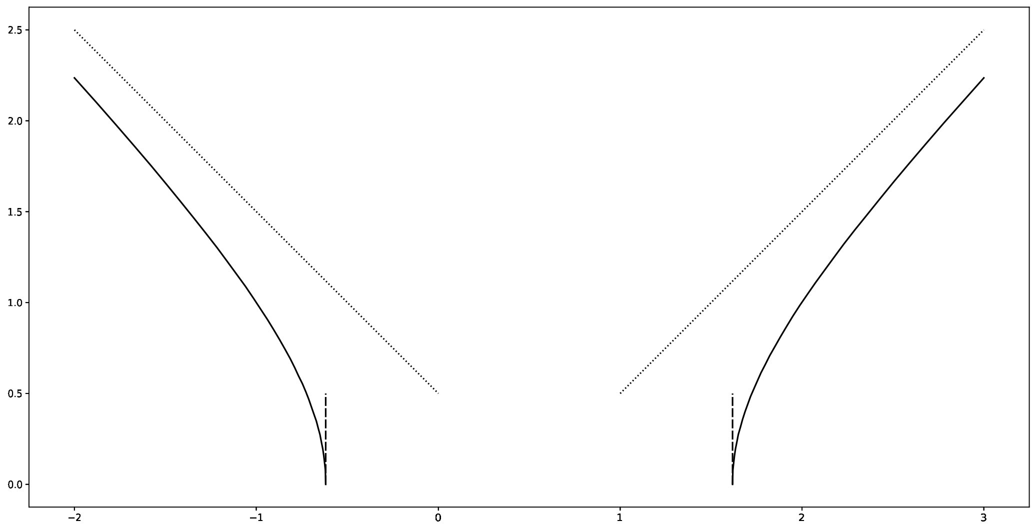
2) Étudions les variations de f : f est dérivable sur $\left]-\infty ; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$ et
$f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-1}}$ qui est du signe de $2x-1$.
Or $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$, et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$.

3) Effectuons un développement asymptotique f au voisinage de $\pm\infty$ en posant $h = \dfrac{1}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$.
$f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} - 1} = \sqrt{\dfrac{1-h-h^2}{h^2}} = \dfrac{\sqrt{1-h-h^2}}{|h|}$.
Or $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \underset{u \to 0}{o}(u^2)$. Donc $f(x) = \dfrac{1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{8} + \underset{h \to 0}{o}(h^2)}{|h|}$. Distinguons les cas $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$:

- si $x \to +\infty$, $h \to 0^+$ et
$f(x) = \dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5h}{8} + \underset{h \to 0}{o}(h) = x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{8x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ et, comme $-\dfrac{5}{8x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est ***en-dessous*** de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- si $x \to -\infty$, $h \to 0^-$ et
$f(x) = \dfrac{-1}{h} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{5h}{8} + \underset{h \to 0}{o}(h) = -x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8x} + \underset{x \to -\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc la droite d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ et, comme $\dfrac{5}{8x} < 0$ au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ est ***en-dessous*** de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

4) Nous l'avons vu à la question précédente, $\mathcal{C}_f$ est ***en-dessous*** de chacune de ses deux asymptotes, que ce soit celle d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$ ou celle d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

5) Représentation graphique :



Exercice 4.

1) P_n est divisible par $X-1$ si et seulement $P(1)=0$.
   Or $P(1)=(-1)^{2n}+0^n-1=0$ car $n>0$.
   De même, P_n est divisible par $X-2$ si et seulement $P(2)=0$.
   Or $P(2)=0^{2n}+1^n-1=0$ car $n>0$.

2) P_n est divisible par $(X-1)$. Notons Q_1 le quotient de P_n par $(X-1)$.
   On a donc $P_n=(X-1)Q_1$. De plus $P_n(2)=0$ d'après la question précédente, donc $(2-1)Q1(2)=0$ donc $Q_1(2)=0$: Q_1 est donc divisible par $(X-2)$.
   Notons Q le quotient de la division euclidienne de Q_1 par $(X-2)$: on a donc $P_n=(X-1)(X-2)Q$.
   Donc P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$.
   Le même raisonnement reste valable en divisant P_n d'abord par $X-2$, en notant Q_2 le quotient obtenu, puis en divisant Q_2 par $X-1$.
   Par unicité du quotient dans la division euclidienne, le quotient de Q_2 par $(X-1)$ est à nouveau Q puisque cette seconde méthode conduit encore à écrire $P_n=(X-1)(X-2)Q$.
   Donc $(X-1)Q=Q_2$ et $(X-2)Q=Q_1$. En développant, on a donc $XQ-Q_2=Q$ d'une part, et $XQ-Q_1=2Q$ d'autre part.
   Par soustraction de ces deux égalités, on obtient $Q=Q_2-Q_1$.

3) Calculons Q_1 :
   $P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1=(X-2)^{2n}-(-1)^{2n}+(X-1)^n$
   Donc $P_n=(X-2+1)\left((X-2)^{2n-1}+(X-2)^{2n-2}\times(-1)+...+(-1)^{2n-1}\right)+(X-1)^n$.
   Donc $Q_1=(X-2)^{2n-1}-(X-2)^{2n-2}+...-1+(X-1)^{n-1}$.
   De même, pour calculer Q_2 on écrit :
   $P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1^n$.
   Donc $P_n=(X-2)^{2n}+(X-1-1)\left((X-1)^{n-1}+(X-1)^{n-2}\times 1+...+1^{n-1}\right)$.
   Donc $Q_2=(X-2)^{2n-1}+(X-1)^{n-1}+(X-1)^{n-2}+...+1$.

Finalement, par soustraction :

$$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= ((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + ... - (X-2) + 1) \\ &\quad + ((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + ... + (X-1) + 1) \end{aligned}$$

Exercice 5.

1) F et G sont de manière évidente inclus dans E.
La fonction nulle est à la fois paire et impaire donc appartient à F et à G.
Enfin, toute combinaison linéaire de fonctions paires est paire. En effet, soit $u \in F$ et $v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :
$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda u + \mu v)(-x) = \lambda u(-x) + \mu v(-x) = \lambda u(x) + \mu v(x)$ car u et v sont paires.
Donc $\lambda u + \mu v$ est elle aussi paire.
On démontre de même que G est stable par combinaison linéaire.
Donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2) Soit u une fonction à la fois paire et impaire.
Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = u(x)$ car u est paire.
Mais aussi, $\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = -u(x)$ car u est impaire.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = -u(x)$: donc pour tout x réel, $2u(x) = 0$.
Donc u est la fonction nulle.
Donc la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

3) ***Analyse*** : soit $f \in E$ et supposons qu'il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$.
Alors, d'une part $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_f(x) + I_f(x)$.
D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = P_f(-x) + I_f(-x) = P_f(x) - I_f(x)$ car P_f est paire, et I_f est impaire.
En sommant ces deux relations, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, P_f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.
Et par soustraction, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, I_f(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Donc, si P_f et I_f existent, elles sont uniques et données par les deux relations précédentes.
Synthèse : soit $f \in E$ et notons $P_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right.$ et $I_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right.$
Alors :
   - P_f est une fonction paire : en effet, pour tout réel x,
   $P_f(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = P_f(x)$.
   - I_f est une fonction impaire : en effet, pour tout réel x,
   $I_f(-x) = \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \dfrac{-f(x)+f(-x)}{2} = -I_f(x)$.
   - $f = P_f + I_f$. En effet, pour tout réel x,
   $P_f(x) + I_f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = \dfrac{f(x)+f(x)}{2} = f(x)$.

Donc il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$, de plus ces deux fonctions sont uniques.

4) La question précédente prouve que $E = F + G$. La question 2) prouve de plus que la somme est directe.
Donc
$$E = F \oplus G$$

5) Applications numériques : explicitons les fonctions P_f et I_f dans les cas suivants

a) $f = \exp$: pour tout réel x,
$P_f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$ et
$I_f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$
Donc $P_{\exp} = \mathrm{ch}$ et $I_{\exp} = \mathrm{sh}$.

b) $f = x \mapsto 2 - 3x + 5x^2 + x^3$: pour tout réel x,
$P_f(x) = \dfrac{2 - 3x + 5x^2 + x^3 + 2 + 3x + 5x^2 - x^3}{2} = 2 + 5x^2$ et
$I_f(x) = \dfrac{2 - 3x + 5x^2 + x^3 - 2 - 3x - 5x^2 + x^3}{2} = -3x + x^3$

c) $f = x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$: pour tout réel x,
$P_f(x) = \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}{2} = \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{e^x+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et
$I_f = f - P_f$ par définition, donc $I_f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^x - 1}{2\,(1+e^x)}$.

Exercice 6.

1) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b > a$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
g est continue comme différence de fonctions continues d'une part, et
$g(a) = f(a) - a = b - a > 0$ et $g(b) = f(b) - b = f(f(a)) - b = a - b < 0$.
Donc g change de signe sur l'intervalle $[a; b]$, donc $\exists c \in]a; b[, f(c) = c$.

2) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b < a$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
g est continue comme différence de fonctions continues d'une part, et
$g(a) = f(a) - a = b - a < 0$ et $g(b) = f(b) - b = f(f(a)) - b = a - b > 0$.
Donc g change de signe sur l'intervalle $[b; a]$, donc $\exists c \in]b; a[, f(c) = c$.

3) Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Soit $b = f(a)$.
- ou bien $a = b$ c'est-à-dire $a = f(a)$ et il existe un réel x (c'est le réel a) tel que $f(x) = x$;
- ou bien $a < b$, et on a vu à la question 1) qu'il existe un réel x (noté c) tel que $f(x) = x$;
- ou bien $a > b$, et on a vu à la question 2) qu'il existe un réel x (noté c) tel que $f(x) = x$.

Ce sont les trois seuls cas possibles : donc, dans tous les cas,
$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = x$$

Exercice 7.

1) Supposons $u \circ u = 0$ et montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Par définition, il existe $x \in F$ tel que $y = u(x)$.
Donc $u(y) = u(u(x)) = u \circ u(x) = 0_F$.
Donc $y \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

2) L'implication de la question précédente est une équivalence. En effet,
supposons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Soit $x \in F$.
$u \circ u(x) = u\big(u(x)\big)$ où $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ par définition de l'image d'une application linéaire.
Or $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $u\big(u(x)\big) = 0_F$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in F$, $u \circ u$ est l'application nulle.

3) L'endomorphisme $u : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y; 0) \in \mathbb{R}^2$ est un endomorphisme non nul vérifiant les hypothèses des questions précédentes.