

Dimension des espaces vectoriels

I. Rappels

Ex. 15.1 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles et l'ensemble F des suites réelles convergeant vers 0. Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Est-ce aussi le cas des suites réelles convergeant vers 1 ?

Ex. 15.2 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

b. Montrer que $E = F \oplus G$.

F et G étant supplémentaires dans E , on peut définir

- la projection p_F sur F parallèlement à G ;
- la projection p_G sur G parallèlement à F ;
- la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

c. Soit $M \in E$ une matrice quelconque. Exprimer $p_F(M)$, $p_G(M)$ et $s(M)$ à l'aide de M et M^T .

d. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

$$\text{Résoudre l'équation } P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

II. Familles

Ex. 15.3 Exhiber une famille génératrice des sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = 2y\}$ et

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + 2z = y - 3t = 0\} \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

Sont-ils supplémentaires ?

Ex. 15.4 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 15.5 Déterminer dans chaque cas si les familles sont libres ou non :

- dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = (9; -3; 7); (1; 8; 8); (5; -5; 1)$;
- dans $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, $\mathcal{G} = ((1 + i; i); (1 - i; 1))$.

Ex. 15.6 Montrer que les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ $x \mapsto 1$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire qu'elles forment une famille libre).

Ex. 15.7 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (0; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; 0; -1)$ et $\vec{e}_3 = (2; 1; 1)$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{u} = (4; -1; 1)$?
- Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{v} = (x, y, z)$?

Ex. 15.8 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = X - \alpha$ et $P_3 = (X - \alpha)^2$ forment une base de E .

Ex. 15.9 Justifier que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y = 3z + 2t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Ex. 15.10 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in E, m_{1,1} + m_{1,2} + m_{2,1} + m_{2,2} = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

III. Espaces vectoriels de dimension finie

Ex. 15.11 (Cor.) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

On note F l'ensemble des fonctions de E qui sont bornées, G l'en-

semble des fonctions de E qui sont monotones et H l'ensemble des combinaisons linéaires des trois fonctions ch , sh , $\exp$.

- Examiner si F , G et H sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Quelle est la dimension de H ?

Ex. 15.12 Après avoir démontré que c'est une famille libre, compléter $(X^2; (X+1)^2)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex. 15.13 (Cor.)

- Dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = ((i; 1+i); (-1; -1+i); (2-i; 1-3i))$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, étant donné $m \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{G} = ((m-1; 1); (-2; m-4))$.

Ex. 15.14 On considère l'équation différentielle

$$(E) : (x-1)^3 y' - 2y = 0$$

- Résoudre (E) sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
- Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base.

Ex. 15.15 On considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ (avec $p \leq n, q \leq n$).

- Rappeler la formule de Grassmann.
- Montrer que $\max(p; q) \leq \dim(F+G) \leq \min(n; p+q)$.
- Montrer que $\max(p+q-n; 0) \leq \dim(F \cap G) \leq \min(p; q)$.

IV. Applications linéaires en dimension finie

Ex. 15.16 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de E et déterminer leur noyau et leur image :

$$(1) P \mapsto X.P' \quad (2) P \mapsto P - P' \quad (3) P \mapsto P(X+1) - P(X)$$

Ex. 15.17 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 de vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $\begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i} + 3\vec{j} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{i} - 5\vec{j} \end{cases}$.

Déterminer $f(x\vec{i} + y\vec{j})$, le noyau et l'image de f .

Ex. 15.18 (Cor.) Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) \mapsto (x+2y+3z; 4x+5y+6z; 7x+8y+9z) \end{cases}$$

- Déterminer $\text{Ker } f$.
- En déduire $\text{rg } f$.
- Déterminer $\text{Im } f$.

Ex. 15.19 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$P \mapsto (X+1)P'$$

Montrer que ϕ est linéaire et préciser une base de son image et de son noyau.

Ex. 15.20 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(0); P(1)) \end{cases}$.

Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 15.21 Extrait d'oral Centrale PSI

Soient $p : x \mapsto e^x \cos x, q : x \mapsto e^x \sin x, r : x \mapsto e^{-x} \cos x$ et $s : x \mapsto e^{-x} \sin x$.

On considère $E = \text{Vect}(p, q, r, s)$ et $D : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto D(f) = f' \end{cases}$.

- Montrer que D est une application linéaire.
- Déterminer le noyau et l'image de D .
- D est-elle injective ? surjective ?
- Montrer que la restriction de D à E est un endomorphisme.
- Quels sont le noyau et l'image de $D|_E$? Est-elle bijective ?
- Obtenir l'ensemble des primitives de p, q, r et s .
- Résoudre $y'' - y = e^x \sin(x) + 2e^{-x} \cos(x)$.

Ex. 15.22 Soient E , F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v) \iff \exists w \in \mathcal{L}(F, G), v = w \circ u.$$

- On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.
Montrer que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$.
- On suppose que $\dim E = n$, $\dim \text{Ker}(u) = n - p$ et $\dim F = r$.
 - Justifier l'existence d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\text{Ker}(u)$.
Quelle est alors la dimension de $\text{Im}(u)$?
 - Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\text{Im}(u)$.
 - On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une base de F .

On définit alors $w \in \mathcal{L}(F, G)$ par

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, si $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$, alors $v = w \circ u$.

Corrections

Cor. 15.2 :

- F et G sont bien inclus dans E . La matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique.
Enfin, étant donnés $A, B \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
 $\lambda A + \mu B^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$, qui est donc symétrique - par caractérisation à l'aide de la transposition.
On fait de même pour G .
- Par analyse-synthèse : on souhaite montrer que $\forall M \in E \exists ! S \in F, \exists A \in G, M = S + A$ (définition de deux espaces supplémentaires)
Analyse : supposons que S et A existent, alors

$$M^T = S^T + A^T = S - A$$

$$\text{et } M = S + A$$

$$\text{Donc } S = \frac{M + M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^T}{2}.$$

Donc si S et A existent, alors elles sont uniques.

Synthèse : En reprenant les deux expressions obtenues ci-dessus, on montre que $M = S + A$, S est symétrique et A antisymétrique.

F et G étant supplémentaires dans E , on peut définir

- la projection p_F sur F parallèlement à G ;
- la projection p_G sur G parallèlement à F ;
- la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

$$\text{c. } p_F(M) = \frac{M + M^T}{2}, p_G(M) = \frac{M - M^T}{2} \text{ et } s(M) = M^T \text{ d'après la question précédente.}$$

En particulier, nous venons de montrer que la transposition est la symétrie par rapport à l'espace vectoriel matrices symétriques, parallèlement à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.

$$\text{d. On cherche les matrices } M \in E, \text{ telles que } P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ que}$$

nous noterons S .

Par définition de p_F , on a donc $M = S + A$ où A est antisymétrique. Donc les solutions de cette équation sont les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2+x & 3+y \\ 2-x & 4 & 5+z \\ 3-y & 5-z & 6 \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Cor. 15.4 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :

- $F \subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u \in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x; y) \in G$ tels que $u = x e_1 + y e_2$. Cherchons donc $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1; 0; 0) + \mu(1; 1; 1) = x(3; 2; 2) + y(0; 1; 1) \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 3x \\ \mu = 2x + y \\ \mu = 2x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\lambda + \mu}{3} \\ y = \frac{\mu - 2\lambda}{3} \end{cases}$$

Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F \subset G$.

- $G \subset F$

1^{ère} méthode : en utilisant les dimensions.

On vérifie facilement que les familles (u_1, u_2) et (e_1, e_2) sont libres - les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = \dim G = 2$. **Or** $F \subset G$ donc F est un sous-espace vectoriel de G . Et comme leurs dimensions sont égales, $F = G$.

2^{ème} méthode : on démontre l'inclusion réciproque.

Soit $e = xe_1 + ye_2 \in G$, montrons qu'il existe $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1 + \mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda(1; 0; 0) + \mu(1; 1; 1) &= x(3; 2; 2) + y(0; 1; 1) &\Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda + \mu &= 3x \\ \mu &= 2x + y \\ \mu &= 2x + y \end{cases} \\ &&&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= x - y \\ \mu &= 2x + y \end{cases} \end{aligned}$$

Donc tout vecteur de G est un vecteur de $F : G \subset F$.

Comme $F \subset G$ et $G \subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 15.11 :

- F est un sous-espace vectoriel de E : l'inclusion est évidente, la fonction nulle est bornée, et toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée.

G n'est pas un sous-espace vectoriel de E : en effet, $f : x \mapsto x^3$ est croissante donc monotone, $g : x \mapsto x$ aussi mais $f - g : x \mapsto x^3 - x$ n'est pas monotone puisque sa dérivée $f' - g' : x \mapsto 3x^2 - 1$ est négative en 0 et positive en 1.

$H = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ donc est un sous-espace vectoriel de E .

- La famille (sh) est libre car composée d'un unique vecteur non nul.

La famille $(\text{sh}; \text{ch})$ est libre aussi : en effet, cherchons λ, μ tels que $\lambda \text{sh} + \mu \text{ch} = 0$.

Alors, évalué en $x = 0$, on a $\mu = 0$.

Et en $x = 1$, on obtient $\lambda = 0$. La famille est donc bien libre.

Enfin $\exp = \text{ch} + \text{sh}$ donc la famille $(\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ est liée.

Donc $\dim H = 2$.

Cor. 15.13 :

- $(i; 1 + i) \neq (0; 0)$ donc $((i; 1 + i))$ est une famille libre.
Or $(-1; -1 + i) = i(i; 1 + i)$ donc $(i; 1 + i)$ et $(-1; -1 + i)$ sont colinéaires.

De même, $(2 - i; 1 - 3i) = (-1 - 2i)(i; 1 + i)$ donc $(i; 1 + i)$ et $(2 - i; 1 - 3i)$ sont colinéaires.

Donc la famille $\mathcal{F} = ((i; 1 + i); (-1; -1 + i); (2 - i; 1 - 3i))$ est de rang 1 dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

- $(m - 1; 1)$ est non nul quel que soit la valeur de $m \in \mathbb{R}$. Donc la famille $((m - 1; 1))$ est libre.

Cherchons si la famille $\mathcal{G} = ((m - 1; 1); (-2; m - 4))$ est libre : soit $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(m - 1; 1) + \mu(-2; m - 4) = (0; 0). \text{ Ceci équivaut au système : }$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (m - 1)\lambda - 2\mu &= 0 \\ \lambda + (m - 4)\mu &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 2\mu \\ \lambda + (m - 4)\mu &= 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda &= 2\mu \\ \lambda + (m - 4)\mu &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - (m - 1)(m - 4) &= 0 \\ \lambda + (m - 4)\mu &= 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda &= 2\mu \\ \lambda + (m - 4)\mu &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5m - 6 &= 0 \\ \lambda + (m - 4)\mu &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que :

- si $-m^2 + 5m - 6 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \{2; 3\}$, la famille $\mathcal{G} = ((m - 1; 1); (-2; m - 4))$ est liée donc $\text{rg } \mathcal{G} = 1$;
- sinon, c'est-à-dire si $m \neq 2$ et $m \neq 3$, la famille $\mathcal{G} = ((m - 1; 1); (-2; m - 4))$ est libre donc $\text{rg } \mathcal{G} = 2$.

Cor. 15.18 :

- Calculons $\text{Ker } f$: soit $(x; y; z) \in \text{Ker } f$. Alors :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ -3y - 6z &= 0 \\ -6y - 12z &= 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{matrix}$$

Les deux dernières équations sont proportionnelles donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -7z \\ y &= 2z \end{cases}$$

Finalement $\text{Ker } f = \{(-7z; 2z; z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-7; 2; 1))$

- $\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2$.

- $\text{Im } f$ est de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires pour obtenir une base.

Or $f(1; 0; 0) = (1; 4; 7)$ et $f(-1; 1; 0) = (1; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires.

Donc $\text{Im } f = \text{Vect}((1; 4; 7); (1; 1; 1))$.