

I. Dérivabilité en un point

I.1. Introduction

Ce chapitre a de multiples objectifs :

- faire une synthèse sur la construction de la notion de dérivée et l'obtention de ses propriétés opératoires notamment : nous démontrerons les différentes formules (somme, produit, composée, etc.) pour calculer une dérivée en un point puis nous en tirerons les conséquences concernant les fonctions dérivables sur un intervalle ;
- établir un lien entre la notion de dérivée qui est à priori locale (valable au voisinage d'un point) et d'autres notions (croissance d'une fonction, etc...) qui sont des notions globales (valables sur un intervalle) : c'est par exemple le cas du théorème donnant le sens de variation d'une fonction lorsque sa dérivée est de signe constant sur un intervalle ;
- faire une synthèse des différents outils du programme de classes préparatoires permettant l'étude des **suites récurrentes** : nous verrons en effet qu'on peut déduire de la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction f des conséquences concernant le comportement d'une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par commodité, on utilisera la notation suivante.



Définition 16.1 (Intérieur d'un intervalle)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$. **L'intérieur** de I est l'intervalle obtenu en privant I de ses bornes. On note $\overset{\circ}{I}$ l'intérieur de I . Un point est dit **intérieur à I** si c'est un point de $\overset{\circ}{I}$.

Ex. 16.1 Soit a et b deux réels avec $a < b$. Pour $I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou encore $I =]a, b[$, on a toujours Pour $I = [a, +\infty[$ on a

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. On désigne par I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant une infinité de points.

De plus on notera $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I.2. Taux d'accroissement et nombre dérivé



Définition 16.2

On appelle **taux d'accroissement** ou **taux de variation** de f en $a \in I$ la fonction

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

Géométriquement, le taux d'accroissement représente la pente de la droite passant par les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.

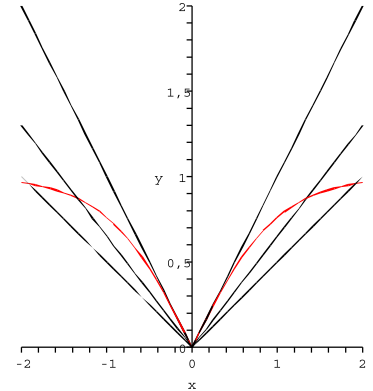


Définition 16.3 (Nombre dérivé)

On dit que f est dérivable en a si τ_a possède une limite finie lorsque x tend vers a . La limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a .

On dit que f est dérivable à gauche en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a , $x < a$. La limite est alors appelée **nombre dérivé à gauche** de f en a .

On dit que f est dérivable à droite en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a , $x > a$. La limite est alors appelée **nombre dérivé à droite** de f en a .



Notation

On note $f'(a)$ le nombre dérivé, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les nombres dérivés à gauche et à droite.

Proposition 16.4

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \end{cases} \text{ et } f'_g(a) = f'_d(a)$$

I.3. Nombre dérivé, développement limité et tangente

Théorème 16.5

f est dérivable en a si et seulement si **au voisinage de** $x \rightarrow a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 11 proposition 11.13.

Corollaire 16.6

Soit f une fonction continue en a .

- Si f est dérivable en a , alors $\mathcal{C}_f$ possède une tangente au point d'abscisse a , qui a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

- Si f **n'est pas dérivable en** a mais que le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ en a ,

alors $\mathcal{C}_f$ possède une tangente au point d'abscisse a , qui a pour équation

$$x = a$$



Remarque

Interprétation cinématique

Dans le cas où la variable représente le temps, le taux d'accroissement représente une **vitesse moyenne**. La dérivée s'interprète alors comme une **vitesse instantanée**.

Théorème 16.7 (Dérivable implique continue)

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration



Important ! Continue n'implique pas dérivable

La réciproque est fautive. La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Si $x < 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Si $x > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut 1. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$. Ces limites étant différentes, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Ex. 16.2 Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et dérivable en a . Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

Cor. 16.2

I.4. Théorèmes opératoires

Proposition 16.8 (Opérations pour la dérivée en un point)

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en un point a de I .

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
- Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si g ne s'annule pas en a , l'inverse $\frac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a avec $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- Si g ne s'annule pas en a , le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration**Proposition 16.9 (Composition de fonctions dérivables en un point)**

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ deux applications et a un point de I . Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Démonstration **Remarque**

La démonstration qui consisterait à écrire que pour $x \neq a$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \right)$$

puis à dire que la première parenthèse tend vers $f'(a)$ et la deuxième vers $g'(f(a))$ est naturelle, mais fausse. Il est possible que $f(x) - f(a)$ s'annule sur tout voisinage de a pour des valeurs différentes de a . Par exemple, $f : x \rightarrow x^2 \sin \frac{1}{x}$ s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de 0. La fonction auxiliaire ψ évite ce problème.

Théorème 16.10 (Dérivée de la bijection réciproque en un point)

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et continue, b un point de J et $a = f^{-1}(b)$. On suppose f dérivable en a . Alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration**I.5. Sens de variation et dérivée****Proposition 16.11 (Croissante implique dérivée positive)**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et a un point de I .

- Si f est dérivable à gauche en a , on a $f'_g(a) \geq 0$.
- Si f est dérivable à droite en a , on a $f'_d(a) \geq 0$.
- Si f est dérivable en a , on a $f'(a) \geq 0$.

Démonstration

**Définition 16.12 (Point anguleux)**

Si f est *continue en a , dérivable à gauche et à droite* en a avec $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, le point $A(a, f(a))$ s'appelle un *point anguleux*.

**Remarque**

En un point anguleux $A(a, f(a))$, on définit
 une demi-tangente à gauche d'équation $y = f(a) + f'_g(a) \times (x - a)$ et
 une demi-tangente à droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a) \times (x - a)$.

II. Dérivabilité sur un intervalle

Dans tout ce qui suit I et J sont des intervalles réels.

II.1. Définitions**Définition 16.13 (Fonction dérivée)**

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I .

La fonction $\begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$ est alors appelée *fonction dérivée* ou plus simplement *dérivée* de f .

**Notation**

Elle est noté f' (notation de Newton) ou encore $\frac{df}{dx}$ (notation de Leibniz).

Ex. 16.3

- Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^n$ a pour dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Par définition (voir chapitre sur les fonctions usuelles) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{d(\ln|x|)}{dx} = \frac{1}{x}$
- Nous avons aussi démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$
 $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{d(a^x)}{dx} = \dots\dots\dots$ et $\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{d(x^r)}{dx} = \dots\dots\dots$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et
 $\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Dérivées des bijections réciproques des fonctions trigonométriques :
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

**Définition 16.14**

| Si f est une fonction dérivable sur I *et que f' est continue sur I* on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

**Notation**

| On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

**Définition 16.15**

| Si f est dérivable, et si sa dérivée est elle aussi *dérivable de dérivée continue sur I* , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

**Notation**

| On note $\mathcal{C}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$ la dérivée de f' .

**Définition 16.16**

| De même, si f est $n \in \mathbb{N}$ fois dérivable sur I *de dérivée n -ième continue sur I* , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

**Notation**

| On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$ la dérivée n -ième de f .
| On retrouve notamment pour $n = 0$ les fonctions $\mathcal{C}^0$ sur I c'est-à-dire continue sur I .

**Définition 16.17**

| Enfin, si f est indéfiniment dérivable sur I , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

**Notation**

| On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Ex. 16.4 Si f est dérivable et si elle est paire ou impaire, sa dérivée f' a-t-elle une parité? Si oui, laquelle?

Cor. 16.4

Ex. 16.5 Si f est dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est-elle aussi bornée? Justifier.

Cor. 16.5

II.2. Théorèmes opératoires

Proposition 16.18 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I .

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I , l'inverse $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I , le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 16.19 (Composition)

Si $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Théorème 16.20 (Bijection réciproque)

Soit $f : I \rightarrow J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I ; de plus $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque

On peut retrouver cette formule en écrivant $f \circ f^{-1} = Id_J$ puis en dérivant comme une composée. On obtient en effet $(f^{-1})' \cdot (f' \circ f^{-1}) = 1$.

Une autre façon de retenir cette formule sans effort est d'utiliser la notation de Leibniz : on pose $y = f(x)$ donc $x = f^{-1}(y)$ et on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Ex. 16.6 Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont n fonctions dérivables sur I avec $n \geq 1$, que vaut la dérivée du produit $\prod_{i=1}^n u_i = u_1 u_2 \dots u_n$?

Cor. 16.6

Ex. 16.7 Calculer la dérivée, sur un ensemble à préciser, de $f : x \mapsto x^x$.

Cor. 16.7

Ex. 16.8 Existe-t-il des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Cor. 16.8

II.3. Théorèmes opératoires pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$

Proposition 16.21 (Combinaison linéaire)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Pour tous α et β éléments de $\mathbb{K}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Proposition 16.22 (Produit, formule de Leibniz)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . La fonction fg est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (\text{formule de Leibniz})$$

Démonstration

Proposition 16.23 (Composition)

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur J , alors $g \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

Proposition 16.24 (Quotient)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec g qui ne s'annule pas sur I . Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

Théorème 16.25 (Bijection réciproque)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \rightarrow J$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . L'application f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

Les démonstrations de la proposition 16.23 et du théorème 16.25 sont hors-programme. La démonstration du théorème 16.24 repose sur le fait que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g} = f \times h \circ g$ où h est la fonction inverse. Cette écriture permet de voir le théorème 16.24 comme une conséquence immédiate de la formule de Leibniz et du théorème de composition 16.23.



Remarque

- Il est immédiat que ces théorèmes se généralisent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Les fonctions de référence vues au chapitre 7 sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité. **Attention cependant** : leur ensemble de dérivabilité n'est pas toujours leur ensemble de définition. Par exemple,
.....
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin^{(k)}(x) = \dots\dots\dots$ et $\cos^{(k)}(x) = \dots\dots\dots$
Ces deux dernières formules se démontrent aisément en écrivant :

$$\left| \frac{d^k e^{ix}}{dx^k} = \cos^{(k)}(x) + i \sin^{(k)}(x) \dots \right.$$

Ex. 16.9 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-x} \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}$.

Cor. 16.9

III. Éléments de calcul différentiel pour les fonctions à valeurs réelles

Dans cette section, on note $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire avec $a < b$ et les fonctions envisagées sont **à valeurs réelles**. Le but de cette section est de démontrer des propriétés énoncées (sans démonstration) au chapitre 5 et d'énoncer en les démontrant des théorèmes généraux valables pour les fonctions définies sur I , dérivables sur $\overset{o}{I}$ et **à valeurs réelles**. Nous verrons ultérieurement comment ces résultats peuvent être (ou non) étendus aux fonctions à valeurs complexes.

III.1. Extremums



Définition 16.26 (Extremum local)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I .

- On dit que f admet un **minimum local** m en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que m soit le minimum de f restreinte à $I \cap V(a)$.
- On dit que f admet un **maximum local** M en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que M soit le maximum de f restreinte à $I \cap V(a)$.

Proposition 16.27 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un point a intérieur à I . Si $f(a)$ est un extremum local de f , alors $f'(a) = 0$ (la réciproque est fausse).

Démonstration



Remarque

- Si a est une borne de I , on peut avoir un extremum pour f en a et $f'(a) \neq 0$. Par exemple, $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ admet $f(1) = 1$ comme maximum et pourtant $f'(1) = 2$.
- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est dérivable, $f'(0) = 0$, mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local.

III.2. Théorème de Rolle

Théorème 16.28 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

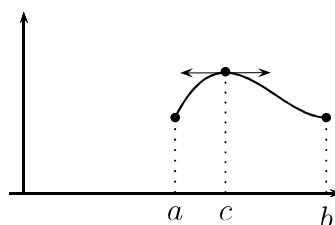
Démonstration

FIGURE 16.1 – Théorème de Rolle

i Remarque

- Le théorème de Rolle, comme le théorème des valeurs intermédiaires, est un théorème d'existence. Il précise que sous certaines conditions la dérivée d'une fonction s'annule au moins une fois. Mais il ne donne ni la valeur du (ou des) points où cette dérivée s'annule, ni leur nombre exact.
- On notera bien qu'il n'est pas nécessaire pour f d'être dérivable en a et en b .
- La conclusion du théorème de Rolle est en défaut, si l'on supprime une seule des trois hypothèses.
 - ★ La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 0$ est dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 0$. Mais f n'est pas continue en 1 et la dérivée de f sur $]0, 1[$ qui est constante à 1 ne s'annule pas.
 - ★ La fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ est continue sur $[-1, 1]$ et $f(-1) = f(1) = 1$. Mais f n'est pas dérivable en 0 et f' , lorsqu'elle existe, ne prend que les valeurs -1 et 1 , donc ne s'annule pas.
 - ★ La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$. Mais $f(0) \neq f(1)$ et $f' = 1$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

Ex. 16.10 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x - 3)(x - 1)x(x + 2)(x + 4)$. Montrer que f' possède quatre racines distinctes.

Cor. 16.10**III.3. Théorème des accroissements finis****Théorème 16.29 (Théorème des accroissements finis)**

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

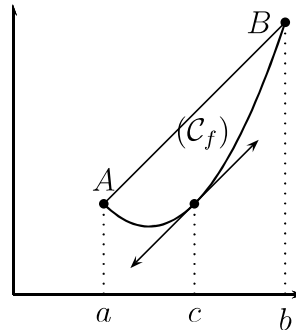
Démonstration

FIGURE 16.2 – Théorème des accroissements finis

Remarque

L'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ s'écrit aussi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Le théorème des accroissements finis relie une notion globale (le taux d'accroissement entre deux points éloignés) et une notion locale (la dérivée en un point). Géométriquement, ce théorème affirme qu'il existe un point $C(c, f(c))$ de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la corde joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Ex. 16.11 Établir que pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

Cor. 16.11**Corollaire 16.30 (Inégalité des accroissements finis : version réelle)**

Si l'application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Démonstration**III.4. Variation, extremums et dérivabilité****Proposition 16.31 (Fonction constante)**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. La fonction f est constante sur I **si et seulement si** sa dérivée f' est nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Démonstration

Ex. 16.12 Soit $g : x \mapsto \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x)$.

- 1) Ensemble de définition et continuité de g .
- 2) Ensemble de dérivabilité de g .
- 3) Calcul de g' .
- 4) Simplifier, pour $x \in [-1; 1]$, l'expression de $g(x)$.

Proposition 16.32 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- Si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est croissante sur I .
- Si $f' \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est décroissante sur I .

Démonstration

Voici un corollaire qui complète la proposition 16.27.

Proposition 16.33 (Condition suffisante d'existence pour un extremum local)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point intérieur à I et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a . Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local.

Démonstration

Ex. 16.13 Trouver tous les réels a strictement positifs tels que $\forall x > 0, a^x \geq x^a$.
En déduire lequel des deux nombres e^π et π^e est le plus grand.

Cor. 16.13**Proposition 16.34 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)**

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ avec f' de signe constant sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Démonstration

Ex. 16.14 Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cor. 16.14

Ex. 16.15 Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \cos x$.

Cor. 16.15**III.5. Limite de la dérivée****Proposition 16.35 (Limite de la dérivée)**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est une fonction continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, f est alors dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration **Remarque**

Le théorème précédent permet d'éviter de vérifier « à la main » qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée par continuité **lorsque sa dérivée possède une limite en ce point**. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre sa portée.

Ex. 16.16 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \end{cases}$.

- 1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
- 2) Montrer que ce prolongement $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 16.16**IV. Convexité****IV.1. Définition****Définition 16.36 (Fonction convexe)**

On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x; y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Ex. 16.17 Étudier, pour $x < y$ réels donnés, la fonction $V : \lambda \in [0; 1] \mapsto (1 - \lambda)x + \lambda y$.

Remarque

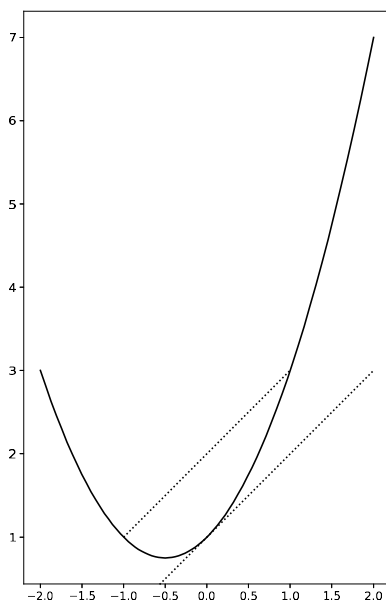
Une fonction pour laquelle

$$\forall (x; y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

est dite **concave** sur I .

D'une manière générale, f est convexe sur I **si et seulement si** $-f$ est concave sur I .

IV.2. Interprétation géométrique



La définition précédente signifie, géométriquement, que la représentation graphique d'une fonction convexe se situe **sous** les segments reliant deux points de cette représentation graphique (on parle de **cordes** pour ces segments).

Au contraire, le théorème 16.38 affirme que la représentation graphique d'une fonction convexe se situe **au-dessus** de chacune de ses tangentes.

Lemme 16.37 (Lemme des trois pentes)

Soit I un intervalle non trivial, f une fonction convexe sur I et $a \in I$, $b \in I$ tels que $a < b$.

Alors

$$\forall x \in]a; b[, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Proposition 16.38 (Position par rapport aux tangentes)

Si f est une fonction **convexe dérivable** sur I , alors

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$$

Démonstration

Soit $a < x_0 < b$ dans I . Dans la définition d'une fonction convexe, on pose $x = a$, $y = b$ et λ de sorte à ce que $x_0 = (1 - \lambda)a + \lambda b$.

On a donc $\lambda = \frac{x_0 - a}{b - a}$.

La définition de f convexe se réécrit $(b - a)f(x_0) \leq (b - x_0)f(a) + (x_0 - a)f(b)$.

Ceci conduit à

$$(1) : \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$(2) : \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En faisant, pour f dérivable, la limite $a \rightarrow x_0$ dans (1), on obtient donc $f'(x_0) \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$.

De même, en faisant la limite $b \rightarrow x_0$ dans (2), on obtient donc $f'(x_0) \geq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$.

Ceci étant vrai pour tout $a < x_0 < b$, on obtient finalement le théorème énoncé en posant $x = a$ ou $x = b$ suivant la position relative de x vis-à-vis de x_0 .

IV.3. Caractérisation des fonctions convexes

Théorème 16.39 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)

Soit I un intervalle non trivial, f une fonction dérivable sur I .

Alors f est convexe sur I **si et seulement si** f' est croissante sur I .

Démonstration

Théorème 16.40 (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .

f est convexe **si et seulement si** $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.

Démonstration

Ex. 16.18 Soit a un réel, et $f_a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^a$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a f_a est-elle convexe ? concave ?

IV.4. Utilité de la notion de convexité



Méthode

La notion de convexité permet de démontrer de façon simple certaines inégalités.

Notamment, le théorème précédent est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction est convexe, puis la définition de la convexité permet alors de parvenir à des inégalités de façon parfois très efficace.

Ex. 16.19 Montrer que $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)}$$

Ex. 16.20 Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$$

En déduire que (pour des nombres strictement positifs)

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

V. Suites récurrentes

V.1. Rappels

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle.

Nous avons vu dans le chapitre 9 sur les suites, le chapitre 13 sur la continuité et le TD 3 sur les suites récurrentes les résultats suivants :

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un **intervalle I stable par f** c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
On considère donc dans ce qui suit que $f : I \rightarrow I$.
- Si f est **croissante** sur I alors u est **monotone**. Plus précisément :
 - ★ si $u_1 \geq u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geq 0$, et si f est **croissante** alors u **est croissante** ;
 - ★ si $u_1 \leq u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leq 0$, et si f est **croissante** alors u **est décroissante**.

On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.

- Si f est **décroissante** sur I alors u **n'est en général pas monotone** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f n'est ni croissante ni décroissante sur I , le comportement de la suite peut être très difficile à prévoir, voire chaotique... Ce type de suite est à priori beaucoup trop éloigné du programme pour faire l'objet d'exercices.
- Si f **est continue sur I** et **si la suite u converge vers l** alors l est **un point fixe de f** c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

Ces résultats associés au théorème 9.50 de convergence monotone (ou au théorème de divergence monotone) et au théorème 13.36 (image continue d'un segment) conduisent aux méthodes ci-dessous.



Méthode : Obtention d'intervalles stables, existence de la suite

On étudie la fonction f de sorte à trouver un ou plusieurs intervalles stables par f . Plusieurs

cas particuliers peuvent faciliter l'obtention de tels intervalles et l'étude de la suite :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un intervalle stable par f !
- Si f est croissante, tout segment de la forme $[a; b]$ où a et b sont deux points fixes de f tels que $a < b$ est stable par f .
En effet, $\forall x \in [a; b], a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow a \leq f(x) \leq b$.
- Si f est décroissante, on peut tenter d'appliquer le point précédent à $f \circ f$.
- **Dans tous les cas, un tableau de variations bien construit et une représentation graphique correcte peuvent aider à déterminer un ou plusieurs intervalles stables par f .**



Méthode : Monotonie de la suite

L'étude de f a permis de connaître ses variations.

- Si f est croissante on étudie le signe de $g = f - \text{id}$:
 - ★ si g est **positive sur l'intervalle stable par f considéré**, la suite est croissante ;
 - ★ si g est **négative sur l'intervalle stable par f considéré**, la suite est décroissante.
- Si f est décroissante, on étudie les termes de rangs pairs et impairs de la suite en utilisant le point précédent.



Méthode : Convergence de la suite

L'étude de f et du signe de g a souvent permis à ce stade d'obtenir le ou les points fixes de f (les points où g s'annule sont les points fixes de f). Sinon, on peut penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g pour montrer qu'elle s'annule.

Les points fixes de f sont des candidats possibles pour la limite de la suite si elle converge !

Pour montrer que la suite converge, le théorème de convergence monotone (appliqué à u ou aux suites extraites de rangs pairs et impairs) est souvent utile.

De même, pour montrer qu'elle diverge, on doit avoir à l'esprit le théorème de divergence monotone.

V.2. Vitesse de convergence

L'inégalité des accroissements finis (voir corollaire 16.30) permet de compléter l'étude d'une suite récurrente convergente pour préciser « la vitesse à laquelle elle converge vers sa limite ».

Aucune capacité particulière sur ce point n'est exigée par le programme. Nous l'illustrerons par un exemple.

Ex. 16.21 Nous avons déjà étudié (exercice 13.22) la suite récurrente définie pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{r}{u_n}}{2} \text{ et nous avons montré que}$$

- u est décroissante à partir du rang 1 ;
- u converge vers $\sqrt{r}$.

Montrer que pour $n \geq 1$, $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{r} \leq \frac{1}{\sqrt{r}}(u_n - \sqrt{r})^2$.

En déduire que pour $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près alors u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

Cor. 16.21

V.3. Fonctions lipschitziennes



Définition 16.41 (Fonction lipschitzienne)

Soient I un intervalle réel, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est k -lipschitzienne sur I si

$$\forall (x; y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Proposition 16.42

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors f est M -lipschitzienne sur I .

Démonstration

Proposition 16.43

Si $I = [a; b]$ est un segment et si $f : I \rightarrow I$ est continue et k -lipschitzienne avec $k < 1$ alors f possède un unique point fixe.

Démonstration



Méthode : Utilisation pour les suites récurrentes

Pour une fonction f dérivable sur un segment I stable par f et k -lipschitzienne avec $k < 1$, toute suite récurrente u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers l'unique point fixe de f .