# Dimension des EV, Polynômes, Continuité

## Exercices

### Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}^4$.
Soient $F = \mathrm{Vect}\big((1;2;1;2);(3;4;1;2)\big)$
et $G = \{(x;y;z;t) \in E, x - y - z + t = 0 \quad \textbf{et} \quad x - y + z = 0\}$.

1) Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et en donner une base.
2) Donner une base de $F$ et en déduire $\dim F$.
3) Montrer que $F \subset G$.
4) En déduire que $F = G$.

### Exercice 2.

Soit $u$, $v$ et $w$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $w_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \quad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Calculer $u_1$.
2) Montrer que la suite $u + v + w$ est constante.
3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_{n+2}$ en fonction de $u_{n+1}$ et de $u_n$.
4) En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5) Donner une formule explicite pour $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6) Montrer que les trois suites $u$, $v$ et $w$ convergent vers une même limite que l'on précisera.

### Exercice 3.

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Soit $P_n = (n-2)X^n - nX^{n-1} + nX + 2 - n \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $Q = aX^n + bX^{n-1} + cX + d \in \mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que $(X-1)^3 \,|\, P_n$.
2) Montrer que $(X-1)^4 \nmid P_n$.
3) On suppose que 1 est racine de multiplicité 3 du polynôme $Q$.
   Montrer que $Q \in \mathrm{Vect}\,(P_n)$.

### Exercice 4.

Dans tout l'exercice, on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2) En étudiant la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$, montrer qu'il existe une unique solution dans $I_n$ à l'équation $\tan(x) = x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n$ l'unique solution dans $I_n$ de l'équation $\tan(x) = x$.
On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Le but des questions suivantes est d'étudier cette suite, et notamment de donner un développement asymptotique de $x_n$ lorsque $n \to +\infty$.

3) Pourquoi peut-on affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ?

4) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}\,(x_n)$.

6) Exprimer $x_n$ en fonction de $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

7) En déduire que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\pi n} + \dfrac{1}{2\pi n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

**Exercice 5.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On identifie polynôme et fonction polynomiale associée.
Pour tout entier $k \in [\![0; n]\!]$, on note $P_k$ le polynôme

$$P_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X+i)$$

Par exemple, $P_0 = 1$ (produit vide), $P_1 = X$, $P_2 = X(X+1)$, etc...
On note $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; ...; P_n)$.
Enfin on définit l'application $\Delta : P \in E \mapsto P(X) - P(X-1)$ et on note, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^{(i)} = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ ... \circ \Delta}_{i \text{ fonctions dans la composée}}$$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de la famille $\mathcal{B}$ et de l'application $\Delta$.

1) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

2) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $E$.

3) Montrer que $\Delta$ est linéaire.

4) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que $\Delta\,(P_{k+1}) = (k+1)P_k$.

5) Que vaut $\Delta\,(P_0)$ ?

6) Conformément au résultat de la question 2), pour tout polynôme $P$ de $E$, on note $(\alpha_0; \alpha_1; ...; \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
On a donc $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$.
   a) Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $E$ et calculer les coordonnées de $\Delta(P)$ dans $\mathcal{B}$.
   b) Calculer $\alpha_0$ en fonction de $P(0)$ et $\alpha_1$ en fonction de $\Delta(P)(0)$.
   c) Conjecturer une formule reliant, pour $k \in [\![1; n]\!]$, $\alpha_k$ et $\Delta^{(k)}(P)(0)$.
   d) Démontrer la formule précédente.

7) En utilisant la question 6)a), calculer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.

8) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $N \in \mathbb{N}$.
Déduire de la question 4) que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} P_k(i) = \frac{P_{k+1}(N)}{k+1}$.