Correction DS n°5

Exercice 1.

1) $G = \{(x;y;z;t) \in E, x - y - z + t = 0 \quad \textbf{et} \quad x - y + z = 0\}$.
Résolvons le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$.
$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y - z + t = 0 \\ 2z - t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ t = 2z \end{array}\right.$
$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y - z \\ t = 2z \end{array}\right.$
Donc $G = \{(y-z;y;z;2z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((1;1;0;0);(-1;0;1;2)\big)$.
Donc G est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'espace vectoriel engendré par une famille), et la famille $\mathcal{G} = \big((1;1;0;0);(-1;0;1;2)\big)$ est génératrice de G, et libre puisque formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est donc une base de G.

2) Par définition de F, la famille $\mathcal{F} = \big((1;2;1;2);(3;4;1;2)\big)$ est génératrice de F, et libre puisque formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est donc une base de F.
En conséquence $\dim(F) = 2$.

3) Pour montrer que $F \subset G$, il suffit de montrer que les deux vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans G.
Or, le vecteur $u = (1;2;1;2)$ vérifie $1 - 2 - 1 + 2 = 0$ et $1 - 2 + 1 = 0$, c'est-à-dire les deux équations définissant G, donc $u \in G$.
De même, $v = (3;4;1;2)$ vérifie $3 - 4 - 1 + 2 = 0$ et $3 - 4 + 1 = 0$, donc $v \in G$.
Donc F est un sous-espace vectoriel de G, donc $F \subset G$.

4) D'après les questions 1 et 2, $\dim(F) = \dim(G) = 2$. D'après la question 3, F est un sous-espace vectoriel de G.
Donc $F = G$.

Exercice 2.

1) $u_1 = \dfrac{v_0 + w_0}{2} = \dfrac{5}{2}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n + u_n + w_n + u_n + v_n}{2} = u_n + v_n + w_n$.
Donc la suite $u + v + w$ est constante égale à $u_0 + v_0 + w_0 = 6$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + w_{n+1}}{2} = \dfrac{\frac{u_n+w_n}{2} + \frac{u_n+v_n}{2}}{2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

4) ***1ère méthode*** : la question précédente permet de voir la suite u comme récurrente linéaire d'ordre 2.
On a $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

Équation caractéristique : $2r^2-r-1=0$, $\Delta=1+8=9$, $r_1=\dfrac{1+3}{4}=1$, $r_2=\dfrac{1-3}{4}=\dfrac{-1}{2}$.
Donc, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda+\mu\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ avec $\lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}$.
Les conditions initiales conduisent à $\lambda+\mu=1$ et $\lambda-\dfrac{\mu}{2}=\dfrac{5}{2}$, donc $3\lambda=6$ et $\mu=1-\lambda$.
Donc $\lambda=2,\mu=-1$.
Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2-\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

2ème méthode : on aurait aussi pu écrire, pour $n\in\mathbb{N}$:
$u_{n+1}=6-v_{n+1}-w_{n+1}=6-\dfrac{u_n+w_n+u_n+v_n}{2}=6-\dfrac{6+u_n}{2}=3-\dfrac{u_n}{2}$
puis utiliser les suites arithmético-géométriques.

5) Le même raisonnement qu'à la question précédente tient pour les suites v et w. La seule différence se situe au niveau des conditions initiales.
Pour v par exemple, on a $v_0=2$ et $v_1=2$.
En posant pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $v_n=a+b\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$, on en déduit que
$a+b=2$, $a-\dfrac{b}{2}=2$, donc $a=2$ et $b=0$.
Donc v est la suite constante égale à 2.
Enfin, comme $u+v+w$ est constante, on a
$\forall n\in\mathbb{N}, w_n=u_0+v_0+w_0-u_n-v_n=6-2+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n-2=2+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.
Finalement

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases} u_n &= 2-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\\ v_n &= 2\\ w_n &= 2+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\end{cases}$$

6) $\frac{-1}{2}\in]0;1[$, donc $\left(\frac{-1}{2}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=2$.

Exercice 3.

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
$P_n(1)=n-2-n+n+2-n=0$.
$P_n'(1)=n(n-2)-n(n-1)+n=0$.
$P_n''(1)=n(n-1)(n-2)-n(n-1)(n-2)=0$.
Donc $(X-1)^3\,|P_n$.

2) $P_n'''(1)=n(n-1)(n-2)^2-n(n-1)(n-2)(n-3)=n(n-1)(n-2)>0$ car $n>2$.
Donc 1 est racine de multiplicité 3 dans P, donc $(X-1)^4\not|P_n$.

3) On suppose que 1 est racine de multiplicité 3 du polynôme $Q=aX^n+bX^{n-1}+cX+d$.
Donc, notamment, $Q(1)=Q'(1)=Q''(1)=0$. Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0\\ na + (n-1)b + c = 0\\ n(n-1)a + (n-1)(n-2)b = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 & \\ b + c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{L_3}{n-1} \\ na + (n-2)b = 0 & L_3 \leftarrow \dfrac{L_3}{n-1} \end{cases}$$

Donc $b = -c$, $a = -d$ en remplaçant dans la première équation et $na = -(n-2)b$ d'après la troisième équation.

Donc $Q = \dfrac{1}{n-2}\left((n-2)aX^n - naX^{n-1} + naX - (n-2)a\right) = \dfrac{a}{n-2}P$.

Donc $Q \in \operatorname{Vect}(P)$.

Exercice 4.

1) $I = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ est un ***intervalle*** sur lequel la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie, continue et dérivable.
   De plus, $\forall x \in I, f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0.$
   Donc f est constante sur I (qui est un intervalle...) ce qui permet de conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = \frac{\pi}{2}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]n\pi; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
   Soit $g : x \in I_n \mapsto \tan(x) - x$, définie, continue et dérivable sur I_n.
   $\forall x \in I_n, g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) > 0.$
   Donc g est strictement croissante sur I_n.
   Or $\lim\limits_{x \to n\pi} g(x) = -n\pi < 0$ car n est strictement positif,
   et $\lim\limits_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$.
   Comme g est continue et strictement croissante, il existe une unique solution dans I_n à l'équation $g(x) = 0$.
   Donc il existe une unique solution dans I_n à l'équation $\tan(x) = x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution dans I_n de l'équation $\tan(x) = x$.
On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3) $x_n \in I_n = \left]n\pi; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

4) D'après la question précédente, d'une part $x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2} < (n+1)\pi < x_{n+1}$: donc la suite x est strictement croissante.
   D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\pi < x_n$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$ car la fonction tan est π-périodique.
   Or $n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc $0 < x_n - n\pi < \dfrac{\pi}{2}$, domaine sur lequel la fonction Arctan est la bijection réciproque de tan.
   Donc $\operatorname{Arctan}(x_n) = x_n - n\pi$.

6) En utilisant le résultat de la question précédente et celui de la première question, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) = x_n - n\pi \Leftrightarrow x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

7) On reprend le résultat de la question précédente :
étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
Or, lorsque $n \to +\infty$, $x_n \to +\infty$ d'après la question 4, donc $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Et par conséquent,
$\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} = \dfrac{1}{n\pi} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{n\pi}\left(1 - \dfrac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
Donc $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2n^2\pi} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Finalement, en utilisant le développement limité d'Arctan au voisinage de 0

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 5.

1) Soit $k \in [\![0;n]\!]$.
$\deg(P_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \deg(X+i) = \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k$
La famille $\mathcal{B}$ est donc échelonnée en degrés, ne contient pas le polynôme nul : elle est donc libre.
2) Or $\mathcal{B}$ contient $n+1$ vecteurs de E, $\dim(E) = n+1$, c'est donc une base de E.
3) Soit $P \in E$, $Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$,
$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q - \lambda P(X-1) - \mu Q(X-1) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)$.
Donc Δ est linéaire.
4) Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
\Delta(P_{k+1}) &= \prod_{i=0}^{k}(X+i) - \prod_{i=0}^{k}(X+i-1) \\
&= \prod_{i=0}^{k}(X+i) - \prod_{i=-1}^{k-1}(X+i) \\
&= (X+k)\prod_{i=0}^{k-1}(X+i) - (X-1)\prod_{i=0}^{k-1}(X+i) \\
&= (X+k-X+1)\prod_{i=0}^{k-1}(X+i) \\
&= (k+1)P_k
\end{aligned}$$

5) $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$ est le polynôme nul.
6) Conformément au résultat de la question 2), pour tout polynôme P de E, on note $(\alpha_0; \alpha_1; ...; \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
On a donc $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$.
   a) $\Delta(P) = \Delta\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta(P_k)$ car Δ est linéaire.
   Donc $\Delta(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k k P_{k-1}$ d'après les questions 4 et 5. En effectuant un changement

d'indice, on a donc $\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\alpha_{k+1}P_k$.

Donc $\Delta(P) \in \text{Vect}\big(P_0; P_1; ...; P_{n-1}\big)$ qui est un sous-espace vectoriel de E : donc Δ est un endomorphisme de E et les coordonnées de $\Delta(P)$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$(\alpha_1; 2\alpha_2; ...; n\alpha_n; 0)$$

b) Tous les polynômes P_1, P_2, ..., P_n sont divisibles par X par définition.
Donc $\forall k \in [\![1; n]\!]\,, P_k(0) = 0$.
Donc, $P(0) = \alpha_0 P_0(0) + \alpha_1 P_1(0) + ... + \alpha_n P_n(0) = \alpha_0$.
Donc $\alpha_0 = P(0)$.
De même, $\Delta(P) = \alpha_1 P_0 + 2\alpha_2 P_1 + ... + n\alpha_n P_{n-1}$
donc $\alpha_1 = \Delta(P)(0)$ en évaluant en 0.

c) On prend exemple sur la question précédente pour obtenir α_2 :
$\Delta(\Delta(P)) = \Delta^{(2)}(P) = 2\alpha_2 P_0 + 2\times 3\alpha_3 P_1 + ... + n(n-1)\alpha_n P_{n-2}$,
puis, en évaluant en 0, $2\alpha_2 = \Delta^{(2)}(P)(0)$ donc $\alpha_2 = \dfrac{\Delta^{(2)}(P)(0)}{2}$.
On peut poursuivre ainsi et conjecturer que

$$\forall k \in [\![1; n]\!]\,, \alpha_k = \frac{\Delta^{(k)}(P)(0)}{k!}$$

d) Démontrons par récurrence finie que

$$\forall k \in [\![1; n]\!]\,, \Delta^{(k)}(P) = \sum_{i=0}^{n-k}\frac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}P_i$$

Initialisation : nous avons déjà démontré la formule au rang $k = 1$ dans la question 6)b) :

$$\Delta^{(1)}(P) = \Delta(P) = \alpha_1 P_0 + 2\alpha_2 P_1 + ... + n\alpha_n P_{n-1} = \frac{1!}{0!}\alpha_1 P_0 + \frac{2!}{1!}\alpha_2 P_1 + ... + \frac{n!}{(n-1)!}\alpha_n P_{n-1}$$

Hérédité : supposons la formule vraie pour un entier k donné dans $[\![1; n-1]\!]$.
Alors, $k+1 \in [\![2; n]\!]$.
De plus :

$$\begin{aligned}
\Delta^{(k+1)}(P) &= \Delta\big(\Delta^{(k)}(P)\big) \\
&= \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}P_i\right) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k}\frac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}\Delta\left(P_i\right) && \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{n-k}\frac{(k+i)!}{i!}i\alpha_{k+i}P_{i-1} && \text{d'après les questions 4) et 5)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k-1}\frac{(k+i+1)!}{(i+1)!}(i+1)\alpha_{k+i+1}P_i && \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{i=0}^{n-(k+1)}\frac{(k+1+i)!}{i!}\alpha_{k+1+i}P_i
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]\,, \Delta^{(k)}(P) = \sum_{i=0}^{n-k}\frac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}P_i$.

En évaluant en 0, comme $P_i(0) = 0$ pour tout entier $i > 0$, on obtient pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$

$$\Delta^{(k)}(P)(0) = \frac{k!}{0!}\alpha_k P_0 = k!\alpha_k$$

Ce qui achève la démonstration :

$$\forall k \in [\![1;n]\!]\,, \alpha_k = \frac{\Delta^{(k)}(P)(0)}{k!}$$

7) D'après la question 6)a), pour tout polynôme $P \in E$ décomposé dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, on a :

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\alpha_{k+1}P_k$$

Calculons $\mathrm{Ker}(\Delta)$: $\Delta(P) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0;n-1]\!]\,, (k+1)\alpha_{k+1} = 0$ puisque $\mathcal{B}$ est une base, donc est libre.
Donc $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ si et seulement si $P = \alpha_0 P_0$. Donc

$$\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}\,(P_0) = \mathbb{R}_0[X]$$

Par ailleurs, $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathrm{Vect}\,(P_0; P_1; ...; P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après la question 6)a) toujours.
Or, en utilisant la formule du rang, on a
$\dim\big(\mathrm{Im}(\Delta)\big) = \dim\left(\mathbb{R}_{n+1}[X]\right) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) = n + 1 - 1 = n.$
Donc $\mathrm{Im}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, de même dimension que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

8) Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$ et $N \in \mathbb{N}$.
D'après la question 4), $\Delta\left(P_{k+1}\right) = P_{k+1}(X) - P_{k+1}(X-1) = (k+1)P_k(X)$.
Cette égalité est donc aussi vraie pour les fonctions polynomiales.
Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} P_k(i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_{k+1}(i) - P_{k+1}(i-1)}{k+1} = \frac{P_{k+1}(N) - P_{k+1}(0)}{k+1}$ par télescopage.
Or $k+1 > 0$ donc $P_{k+1}(0) = 0$.
On obtient finalement

$$\sum_{i=1}^{N} P_k(i) = \frac{P_{k+1}(N)}{k+1}$$

9) On suppose $n \geqslant 3$.
Notons $(a_0; a_1; a_2; a_3; 0; ...; 0)$ les coordonnées de $Q = X^3$ dans la base $\mathcal{B}$.
En utilisant la question 6)d) :
$a_0 = Q(0) = 0$
$\Delta(Q) = X^3 - (X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = 3X^2 - 3X + 1$
$a_1 = \Delta(Q)(0) = 1$
$\Delta^{(2)}(Q) = 3X^2 - 3X - (3X^2 - 6X + 3 - 3X + 3) = 6X - 6$
$a_2 = \dfrac{\Delta^{(2)}(Q)(0)}{2} = -3$
$\Delta^{(3)}(Q) = 6X - (6X - 6) = 6$
$a_3 = \dfrac{6}{3!} = 1$
Donc

$$Q = X^3 = P_1 - 3P_2 + P_3$$

10) Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{i=1}^{N} i^3 \\
&= \sum_{i=1}^{N} P_1(i) - 3P_2(i) + P_3(i) \\
&= \frac{P_2(N)}{2} - 3\frac{P_3(N)}{3} + \frac{P_4(N)}{4} \\
&= \frac{2N(N+1) - 4N(N+1)(N+2) + N(N+1)(N+2)(N+3)}{4} \\
&= N(N+1)\frac{2 - 4N - 8 + N^2 + 5N + 6}{4} \\
&= N(N+1)\frac{N^2+N}{4} \\
&= \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$$