

Dimension des EV, Polynômes, Continuité

Exercices

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}^4$.

Soient $F = \text{Vect}((1; 2; 1; 2); (3; 4; 1; 2))$

et $G = \{(x; y; z; t) \in E, x - y - z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$.

- 1) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
- 2) Donner une base de F et en déduire $\dim F$.
- 3) Montrer que $F \subset G$.
- 4) En déduire que $F = G$.

Exercice 2.

Soit u, v et w les suites définies par $u_0 = 1, v_0 = 2, w_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \quad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

- 1) Calculer u_1 .
- 2) Montrer que la suite $u + v + w$ est constante.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de u_n .
- 4) En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- 5) Donner une formule explicite pour v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- 6) Montrer que les trois suites u, v et w convergent vers une même limite que l'on précisera.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Soit $P_n = (n - 2)X^n - nX^{n-1} + nX + 2 - n \in \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $Q = aX^n + bX^{n-1} + cX + d \in \mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que $(X - 1)^3 | P_n$.
- 2) Montrer que $(X - 1)^4 \nmid P_n$.
- 3) On suppose que 1 est racine de multiplicité 3 du polynôme Q .
Montrer que $Q \in \text{Vect}(P_n)$.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice, on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- 2) En étudiant la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$, montrer qu'il existe une unique solution dans I_n à l'équation $\tan(x) = x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution dans I_n de l'équation $\tan(x) = x$.

On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Le but des questions suivantes est d'étudier cette suite, et notamment de donner un développement asymptotique de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- 3) Pourquoi peut-on affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$?
- 4) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
- 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n - n\pi = \text{Arctan}(x_n)$.
- 6) Exprimer x_n en fonction de $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
- 7) En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On identifie polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note P_k le polynôme

$$P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X + i)$$

Par exemple, $P_0 = 1$ (produit vide), $P_1 = X$, $P_2 = X(X + 1)$, etc...

On note \mathcal{B} la famille $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; \dots; P_n)$.

Enfin on définit l'application $\Delta : P \in E \mapsto P(X) - P(X - 1)$ et on note, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^{(i)} = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta}_{i \text{ fonctions dans la composée}}$$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de la famille \mathcal{B} et de l'application Δ .

- 1) Montrer que la famille \mathcal{B} est libre.
- 2) En déduire que \mathcal{B} est une base de E .
- 3) Montrer que Δ est linéaire.
- 4) Soit $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$. Montrer que $\Delta(P_{k+1}) = (k + 1)P_k$.
- 5) Que vaut $\Delta(P_0)$?
- 6) Conformément au résultat de la question 2), pour tout polynôme P de E , on note $(\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ses coordonnées dans \mathcal{B} .
On a donc $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$.
- a) Montrer que Δ est un endomorphisme de E et calculer les coordonnées de $\Delta(P)$ dans \mathcal{B} .
- b) Calculer α_0 en fonction de $P(0)$ et α_1 en fonction de $\Delta(P)(0)$.
- c) Conjecturer une formule reliant, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, α_k et $\Delta^{(k)}(P)(0)$.
- d) Démontrer la formule précédente.
- 7) En utilisant la question 6)a), calculer $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$.
- 8) Soit $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ et $N \in \mathbb{N}$.

Déduire de la question 4) que $\sum_{i=1}^N P_k(i) = \frac{P_{k+1}(N)}{k + 1}$.

9) On suppose dans cette question que $n \geq 3$.

En utilisant la question 6), donner les coordonnées de X^3 dans la base \mathcal{B} .

10) Soit $N \in \mathbb{N}$. Simplifier $T_N = \sum_{i=1}^N i^3$.