Suites récurrentes, convexité

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle. Les résultats suivants sont ***hors-programme*** : il faut les ***redémontrer*** pour chaque exercice sur les suites récurrentes, mais ils fournissent des ***méthodes*** pour l'étude de ces suites.

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle*** I ***stable par*** f c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est croissante sur I alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est croissante sur I alors u ***est décroissante***.

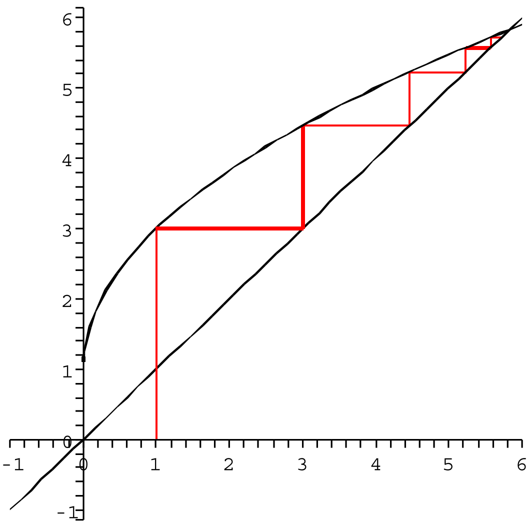
  On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.
- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
  Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

.1. Exemples d'étude de suites récurrentes

Ex. 3.1 Soit $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & r(v_n) = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction r et montrer que son ensemble de définition est ***stable*** par r.
2. Démontrer que v est bien définie.

Ci-contre la représentation graphique de la suite v.
Pour obtenir une telle représentation graphique, on trace d'abord les représentations graphiques $y = x$ et $y = r(x)$.
On place alors $v_0 = 1$ sur l'axe des abscisses et on obtient $v_1 = r(v_0)$ comme l'ordonnée du point d'abscisse v_0 de la représentation graphique de r.
Pour placer v_1 en abscisse, il suffit de prendre l'abscisse du point d'ordonnée v_1 de la représentation graphique de la droite d'équation $y = x$.
On peut alors recommencer le même processus pour représenter v_2, v_3 etc...



3. Montrer que v est monotone.
4. Étudier la convergence de la suite v.

Ex. 3.2 Soit $\left\{\begin{array}{lcl} w_0 & = & \frac{1}{2} \\ w_{n+1} & = & f(w_n) = 1 + \frac{1}{w_n} \end{array}\right.$.

1. Étudier la fonction f et montrer qu'il existe un intervalle de définition qui contient $\dfrac{1}{2}$ et est ***stable*** par f.
2. Démontrer que w est bien définie.
3. Représenter graphiquement f sur l'intervalle trouvé à la première question, ainsi que les premiers termes de la suite w.
4. w est-elle monotone ?
5. Étudier la convergence de la suite w.

Ex. 3.3 (Cor.) On définit la suite t par $\left\{\begin{array}{lcl} t_0 & \in & \mathbb{R} \\ t_{n+1} & = & h(t_n) = \frac{t_n^2}{4} + 1 \end{array}\right.$

1. Montrer que t est bien définie.
2. Tracer dans un même repère la représentation graphique de h et de la première bissectrice.
3. Résoudre l'équation $h(x) = x$.
4. Montrer que t est croissante et en déduire ses comportements asymptotiques possibles.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$. Que peut-on en déduire ?
6. Etudier le comportement de t lorsque $t_0 \notin [0; 2]$.

Ex. 3.4 (Cor.) ***Oral Mines*** Étudier la suite s définie par $s_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = 1 - s_n^2$.
[Indication : l'exercice a été donné sans question intermédiaire.
On pourra utiliser comme plan d'étude : étudier $k : x \mapsto 1 - x^2$ et montrer que $k([0; 1]) = [0; 1]$, représenter graphiquement k et la première bissectrice puis étudier les termes de rang pair et impair de la suite s pour parvenir à une conclusion.]

Ex. 3.5 (Cor.) [$**$] f désigne une application continue et strictement croissante, du segment $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie : $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, a], f(x) < x$.
On suppose, en outre, que l'on a au voisinage de 0, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
On considère des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $a_1 \in]0, a]$ et $b_1 \in]0, a]$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$.
Montrer que l'on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

.2. Convexité

Ex. 3.6 Soient $p \in]1; +\infty[, q \in]1; +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Ex. 3.7 En utilisant le résultat de l'un des exercices du cours, montrer que

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2}$$