

Nombres complexes

I. Conjugué, module, parties réelle et imaginaire

- Ex. 3.1** Soit z un nombre complexe différent de i .
Montrer que $Z = \frac{iz - 1}{z - i}$ **est bien défini** et que $Z \neq i$.
- Ex. 3.2** Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$
- Ex. 3.3** Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes de module inférieur ou égal à 1 alors $|z_1 + z_2| \leq \sqrt{2}$ ou $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{2}$.
- Ex. 3.4** Soit z un nombre complexe de module 1, différent de -1 .
Montrer que $u = \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{2}$ est bien défini et que $u \in i\mathbb{R}$.

II. Trigonométrie

- Ex. 3.5** Écrire sous la forme trigonométrique les complexes suivants :
 $z_1 = -3$ $z_2 = -3i$ $z_3 = -2 + 2i$ $z_4 = \sqrt{3} - i$ $z_5 = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) - i$
- Ex. 3.6** Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $a = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ et $b = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.
a. Montrer que $\bar{a} = b$ puis calculer $a + b$ et ab .
b. En déduire a et b .
- Ex. 3.7** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
a. Écrire $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
b. En prenant $\theta = \frac{\pi}{5}$, déduire de la question précédente la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

- c. Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}$.

Ex. 3.8 Linéariser les polynômes trigonométriques :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \sin^5 x \quad B(x) = \cos^3 x \sin^2 x \quad C(x) = \cos^6 x$$

Ex. 3.9 Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$

$$\text{et } B_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

Ex. 3.10 $[**]$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_n : x \in [-\pi; \pi] \mapsto 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$

$$\text{et } F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

- a. Que vaut $D_n(0)$?
b. Montrer que pour tout $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$,
$$D_n(x) = 2 \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1.$$

c. En déduire que pour tout $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- d. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$?
e. Montrer que pour tout $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right)^2$$

- f. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} F_n(x)$?

III. Divers

Ex. 3.11 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$$

- Montrer que $\forall x \in [0; 1], \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, 0 \leq f_k(x) \leq 1$.
- Soit x un nombre réel. Simplifier la somme

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x)$$

- Soit x un nombre réel. Simplifier la somme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} f_k(x)$$

- Soit x un nombre réel. Simplifier la somme

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} f_k(x)$$

- Existe-t-il une famille $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ de nombres réels telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k f_k(x) = x^3 \quad ?$$

Ex. 3.12 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Calculer } S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \text{ et } T_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^i \binom{j}{i}.$$

$$\text{En déduire la valeur de } \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ i \text{ pair}}} \binom{j}{i} \text{ et } \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ i \text{ impair}}} \binom{j}{i}.$$

Ex. 3.13 Soit z un nombre complexe et n un entier strictement positif. Simplifier la somme

$$A_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} z^j$$

en distinguant les cas $z = 1$ et $z \neq 1$.

Ex. 3.14 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues **complexes** :

$$\begin{array}{rclcl} (1+i)x & + & y & = & 2i \\ ix & + & (1+i)y & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rclcl} x & + & y & + & z = 0 \\ x & + & iy & - & z = 1 \\ x & - & y & + & z = -1 \end{array}$$

Ex. 3.15 Résoudre et **discuter suivant la valeur du paramètre** **a complexe** le système suivant d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & 1 \\ ay & + & z & = & 1 \\ x & + & az & = & 1+i \end{array}$$

Ex. 3.16 Soit $h : \begin{cases} H \rightarrow D \\ z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

- Justifier rapidement que h est bien définie sur H .
- Soit $z \in H$. Montrer que $h(z) \in D$.
- Soit $Z \in D$. Montrer qu'il existe $z \in H$ tel que $Z = h(z)$.
- Que peut-on déduire des deux questions précédentes concernant l'application h ?
- Soit $z \in H$ et $z' \in H$ tels que $h(z) = h(z')$. Montrer que $z = z'$.
- Que peut-on déduire de la question précédente concernant l'application h ?
- Montrer que h est une bijection de H vers D et donner l'expression de sa bijection réciproque.

[Espace de départ. Espace d'arrivée. Animation de la transformation.](#)