EV, polynômes, matrices

Exercice 1.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2^x P(x)\}$.

Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & \phi(f) = (x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+1) - f(x)) \end{array} \right.$.

Autrement dit, ϕ est l'application qui à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
3) Que vaut $\operatorname{Ker} \phi$?
4) Montrer que la restriction de ϕ à F est un automorphisme.
   Remarque : on montrera notamment que $\forall f \in F, \phi(f) \in F$.
5) Donner l'antécédent par ϕ des applications suivantes :
   a) $f_1 : x \mapsto 2^x$
   b) $f_2 : x \mapsto 2^x x$
   c) $f_3 : x \mapsto 2^x x^2$
6) Simplifier l'expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k k^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$.

Partie A - Suites à valeurs réelles

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathbb{R}$, de sorte que $u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$.

1) Étudier la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2 + x$.
2) Tracer dans un même repère orthonormé (unité 2cm ou 2 carreaux) la représentation graphique de f sur $[-1; 2]$ et la droite d'équation $y = x$.
3) Montrer que, quelle que soit la valeur de u_0, la suite u est décroissante.
4) On suppose que $u_0 \in]-\infty; 0[$. Montrer que u diverge vers $-\infty$.
5) On suppose que $u_0 \in [0; 1]$. Montrer que u converge et donner sa limite.
6) Que peut-on affirmer si $u_0 \in]1; +\infty[$?

Partie B - Suites à valeurs complexes

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathbb{C}$, de sorte que $u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ à priori, même s'il reste possible que les termes de la suite soient, tous ou en partie, réels...

On rappelle qu'une suite complexe converge vers $c \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite des parties réelles de ses termes converge vers $\mathcal{R}e\,(c)$ et la suite des parties imaginaires de ses termes converge vers $\mathcal{I}m\,(c)$.

1) On suppose que $u_0 = \frac{1}{2} + ib$ avec $b \in \mathbb{R}$.
   Calculer u_1 puis donner les valeurs de b pour lesquelles la suite converge.
   On précisera notamment la valeur de sa limite lorsqu'il y a convergence.

2) On suppose que $|u_0| > 2$. Montrer que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Partie C - Suites à valeurs matricielles

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de sorte que $u \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.

Plus précisément, on suppose qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_0 = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Calculer u_n (pour $n \in \mathbb{N}$) en fonction de a, b et n.

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que ***les suites des coefficients*** des matrices u_n ***convergent toutes***.