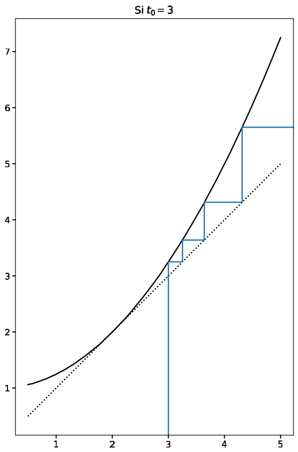
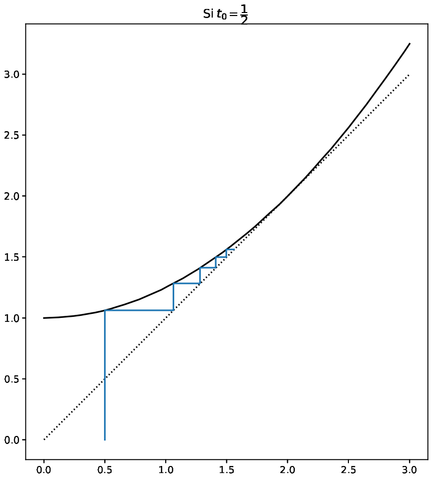
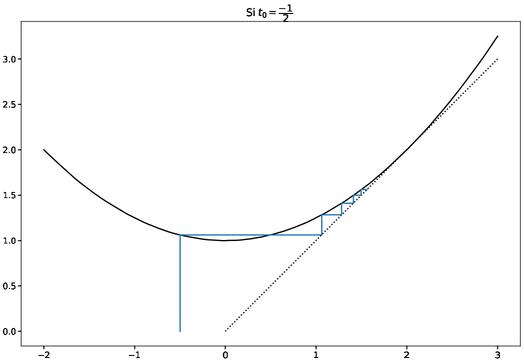
Cor. 3.3 :

1. $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{4} + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est un intervalle stable. Donc la suite t est bien définie.
2. h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ (par affinité et translation d'une fonction de référence). On donne ci-dessous 3 représentations graphiques de h, la première bissectrices et les premiers termes de la suite t pour différentes valeurs de t_0.







3. $h(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
4. On a déjà vu que h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc h passe par un minimum 1 en $x = 0$.
   Comme h est continue, $h(\mathbb{R}) = [1; +\infty[$. Notamment, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par h.
   Si $t_0 \leqslant 0$ alors $t_1 \geqslant 0$ et, d'après la remarque précédente, tous les termes de la suites sont alors positifs.
   On peut donc considérer que la suite est à termes positifs quitte à commencer au rang 1.
   Supposons donc $t_0 \geqslant 0$. Comme h est croissante sur $\mathbb{R}_+$, la suite t est monotone.
   Or, d'après la question précédente, $h(x) - x = \dfrac{(x-2)^2}{4} \geqslant 0$. Donc la suite t est croissante.
   Si de plus elle est majorée, alors elle est convergente.
   Si au contraire elle n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$.
   h est croissante sur $[0; 2]$, et $h(0) = 1$, $h(2) = 2$. Donc $[0; 2]$ est un intervalle stable.
   Donc la suite t est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.
   Comme de plus h ***est continue*** et possède un unique point fixe 2, on a
   $$\lim_{n \to +\infty} t_n = 2$$
6. Supposons $t_0 > 2$. La suite t est croissante d'après la question 4.
   Montrons ***par l'absurde*** qu'elle n'est pas majorée : supposons qu'elle est majorée. Alors elle serait convergente, et comme h est continue, convergerait vers un point fixe de h.
   Or h possède un unique point fixe 2.
   On aurait donc
   $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 2$ d'une part et
   $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \geqslant t_0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n \geqslant t_0 > 2$ d'autre part, ce qui est absurde.
   Donc t n'est pas majorée et $\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$.
   Enfin, par parité de h, si $t_0 < 0$, $t_1 > 0$ et on se ramène à l'un des deux cas précédents suivant que $t_1 \in [0; 2]$ ou $t_1 \in]2; +\infty[$.

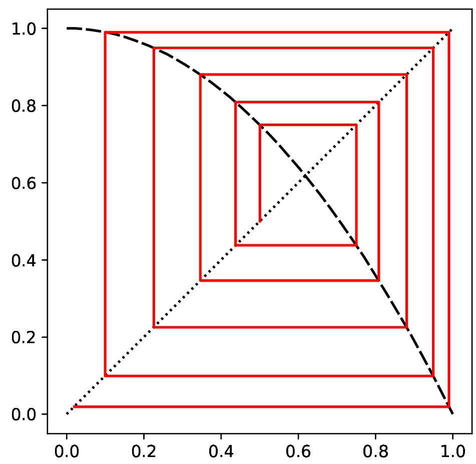
Cor. 3.4 : Soit $f : x \in [0; 1] \mapsto 1 - x^2$.
f est définie, continue et dérivable sur $[0; 1]$ et
$f'(x) = -2x$ donc f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0; 1]) = [0; 1]$.
De plus, $s_0 = \dfrac{1}{2} \in [0; 1]$, donc la suite s est bien définie d'une part, et $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in [0; 1]$ d'autre part.
La suite s est donc bornée.

f étant strictement décroissante on étudie les sous-suites extraites de rang pair et impair et pour cela, on étudie $h = f \circ f$.
$\forall x \in [0;1], h(x) = 1 - \left(1 - x^2\right)^2 = 2x^2 - x^4$.
$h'(x) = 4x - 4x^3 = 4x\left(1 - x^2\right) = 4xf(x) \geqslant 0$ puisque $x \in [0;1]$ est positif et $f(x) \in [0;1]$ aussi.
Donc $h = f \circ f$ est croissante, donc les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
$s_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$s_2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
$s_3 = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256} > \frac{192}{256} = \frac{3}{4}$.
Finalement, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Ces deux suites étant bornées, elles convergent vers un point fixe de h (car h est continue).

Cherchons les points fixes de h :
$h(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0$ avec 1 pour racine évidente du second facteur.
Donc $h(x) = x \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$ ce qui conduit donc aux 4 points fixes $\left\{0; 1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
La dernière racine n'est pas dans l'intervalle $[0;1]$ donc ne peut pas être limite des deux suites extraites.
De même $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$ ne peut être limite des deux suites extraites.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = 0$ (décroissante, bornée par 0 et $s_0 = \frac{1}{2}$, la seule limite possible est 0)
et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} = 1$ (croissante, bornée par $s_1 = \frac{3}{4}$ et 1, la seule limite possible est 1).

Les deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, donc s diverge.

Bonus : représentation graphique de la suite



Cor. 3.5 : Le cas où $a_1 = b_1$ étant évident, on peut supposer $a_1 < b_1$ (le dernier cas se traitant de manière identique).
f étant strictement croissante et comme $\forall x \in]0;a], 0 < f(x) < x$, on obtient immédiatement que les deux suites sont bien définies et strictement décroissantes.
Comme elles sont de plus minorées par 0, elles convergent. f étant continue, la limite est 0, unique point fixe de f.
Notamment, $\exists p \in \mathbb{N}^*, 0 < b_{p+1} < a_1 < b_1$ (car b converge vers 0).
On démontre alors par récurrence que

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{p+n} < a_n < b_n$$

Or $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(b_n) = b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
À nouveau, une récurrence sur p permet de montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+p} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
La suite b étant strictement positive, on déduit de l'encadrement (E) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{b_{p+n}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < 1$$

puis, de l'équivalent $b_{n+p} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

c'est-à-dire, par définition, que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$