Maths - Chapitre 17

Ensembles, applications et dénombrement

I. Ensembles et applications

I.1. Rappels

Cardinal d'un ensemble fini

Nous avons déjà défini (voir paragraphe I.8. du chapitre 1) les notions suivantes.
Le nombre d'élément(s) d'un ensemble E fini est appelé ***cardinal de*** E.
C'est l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe des bijections $e : E \to [\![1; n]\!]$.
Chacune de ces bijections représente ***un ordre possible*** pour le dénombrement des éléments de E : c'est une ***numérotation de ces éléments***.
Le cardinal de E est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.
On a $\operatorname{Card} \emptyset = 0$.

Ex. 17.1 Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ et dont les coefficients valent 0 ou 1.
Calculer $\operatorname{Card} E_n$.

Cor. 17.1

Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}, k \in [\![0; n]\!]$ ont été introduits en terminale comme le nombre de manières de choisir k objets parmi n objets.
Nous les avons définis (voir paragraphe III. du chapitre 1) d'une façon complètement différente en début d'année, notamment afin de donner et de démontrer la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Nous avons étendu leur définition dans le chapitre 11 sur les développements limités - au moment où nous avons obtenu le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ - en posant (coefficient binomial généralisé) pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(\alpha - k)}{p!} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{1 \times 2 \times ... \times p}$$

L'un des objectifs de ce chapitre est de montrer que les deux points de vue - celui de terminale où les coefficients binomiaux sont vus comme un outil de ***dénombrement***, et celui de PCSI où ils sont vus comme un outil de calcul littéral et d'analyse - correspondent bien aux mêmes nombres.

I.2. Ensemble des parties d'un ensemble

Notation

Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Autrement dit $\mathcal{P}(E) = \{K, K \subset E\}$.
Notamment $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ***possède un élément***
et $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\}$ ***possède deux éléments***.

Remarque

Pour écrire que A est une partie d'un ensemble E on peut écrire
$A \subset E$: A **est inclus dans** E
ou
$A \in \mathcal{P}(E)$: A **appartient aux parties de** E

Ex. 17.2 Soit $E = \{a; b; c\}$. Que vaut $\mathcal{P}(E)$?

Cor. 17.2

I.3. Image directe, image réciproque d'une partie

Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une application.

Définition 17.1 (Image directe)

Pour une partie A de E, on appelle **image directe de** A **par** u le sous-ensemble de F défini par $\{u(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, u(x) = y\}$
Autrement dit, c'est **l'ensemble des images par** u **des éléments de** A.

Notation

On note $u(A)$ l'image directe de A par u.

Remarque

Avec les notations précédentes :

- $u(\emptyset) = \emptyset$
- Si $A = E$, on obtient $u(E) = \operatorname{Im} u$ l'ensemble image de u.

Important !
Ne pas confondre l'ensemble image $u(E) = \operatorname{Im} u$ et l'ensemble d'arrivée F d'une application.
En effet $u(E) = F \Leftrightarrow$ ....

Ex. 17.3 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$.
Que valent $f(\{b, c\})$ et $f(E)$?

Cor. 17.3

Définition 17.2 (Image réciproque)

Si B est une partie de F, on appelle **image réciproque de** B **par** u le sous-ensemble de E défini par $\{x \in E, u(x) \in B\}$
Autrement dit, c'est **l'ensemble de tous les antécédents des éléments de** B.

Notation
On note $u^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par u.

Important !
Cette notation prête à confusion puisque $u^{-1}(B)$ est toujours défini tandis que u^{-1}, bijection réciproque de u, n'est définie que si ....

Remarque
Avec les notations précédentes :

- $u^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $u^{-1}(F) = E$

Pour une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$, par définition, $\operatorname{Ker} u =$ ....

Ex. 17.4 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$.
Que valent $f^{-1}(\{r\})$, $f^{-1}(\{s\})$ et $f^{-1}(\{t\})$.

Cor. 17.4

I.4. Fonction indicatrice

Définition 17.3 (Fonction indicatrice d'une partie)

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle ***fonction indicatrice de la partie*** A ***de*** E l'application

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} E & \to \quad \{0; 1\} \\ x \in A & \mapsto \quad \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ x \notin A & \mapsto \quad \mathbb{1}_A(x) = 0 \end{cases}$$

Propriété 17.4

Étant donné un ensemble E et deux parties A et B de E, on a

1) $\mathbb{1}_E$ est l'application constante égale à 1.
2) $\mathbb{1}_\emptyset$ est l'application constante égale à 0.
3) $\forall x \in E, 0 \leqslant \mathbb{1}_A(x) \leqslant 1$.
4) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$
5) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
6) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
7) $\mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$
8) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
9) L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est bijective.

Démonstration

- *Les trois premiers points sont évidents.*
- *Montrons que $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.*
  Sens direct *: supposons $A \subset B$. Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ donc $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.*
  Si $x \in A$, alors $x \in B$ donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
  Réciproque *: supposons $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.*
  Soit $x \in A$. $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $x \in B$. Donc $A \subset B$.
- *$A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ se montre en utilisant deux fois la propriété précédente pour $A \subset B$ et $B \subset A$.*
- *Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.*
  Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$. De plus $x \in A$ et $x \in B$ donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
  Sinon, soit $x \notin A$, soit $x \notin B$, donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
  Finalement $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
- *Les deux points suivants se montrent de façon similaire.*
- *Montrons que $\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est bijective.*
  Soit $u \in \mathcal{F}(E, \{0;1\})$ et $A = u^{-1}(\{1\})$.
  Si $x \in A$ alors $u(x) = 1$, sinon $u(x) \neq 1$ donc $u(x) = 0$.
  Donc $u = \mathbb{1}_A$ donc Φ est surjective.
  De plus Φ est injective (car $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$) et par suite bijective.

II. Cardinal d'une partie d'un ensemble

II.1. Cardinal et fonction indicatrice d'une partie

Lemme 17.5

Soit E un ensemble fini et A une partie de E.

$$\operatorname{Card} A = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Conformément au programme officiel, cette propriété, très intuitive, est admise sans démonstration.

II.2. Cardinal d'une partie

Proposition 17.6

Si E est un ensemble fini et $A \subset E$ alors

$$\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow A = E$$

Démonstration

- $\operatorname{Card} A = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) \leqslant \sum_{x\in E} 1 = \operatorname{Card} E$.
- *Si* $A = E$, $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$.
  Sinon, il existe $x_0 \in E, x_0 \notin A$ *d'où* $\mathbb{1}_A(x_0) = 0 < 1$.
  Donc $\operatorname{Card} A = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) < \sum_{x\in E} 1 = \operatorname{Card} E$.
  Donc $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow A = E$.

II.3. Opérations sur les cardinaux

Proposition 17.7

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$$

En particulier,
$\operatorname{Card}(A \cup B) \leqslant \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$
$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
et $\operatorname{Card} \overline{A} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$.

Démonstration

$\operatorname{Card}(A \cup B) = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) + \sum_{x\in E} \mathbb{1}_B(x) - \sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ *donc*
$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

Proposition 17.8

Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et $\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$.

Démonstration

Soient n *le cardinal de* E *et* $b : E \to [\![1;n]\!]$ *une bijection associée.*
$E \times F = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{b^{-1}(i)\}\right) \times F = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\{b^{-1}(i)\} \times F\right)$ *est une partition de* $E \times F$ *donc*
$\operatorname{Card} E \times F = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}\left(\{b^{-1}(i)\} \times F\right)$ *d'après la proposition précédente, d'où*

$\operatorname{Card} E \times F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} F = n \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F.$

Une façon plus simple de se représenter ce résultat consiste à se représenter les éléments de $E \times F$, c'est-à-dire ***les couples formés d'un élément de*** E ***et d'un élément de*** F *comme les cases d'un tableau où chaque ligne correspond à un élément de E et chaque colonne à un élément de F :*

	f_1	f_2	$\dots$	f_p
e_1	$(e_1; f_1)$	$(e_1; f_2)$	$\dots$	$(e_1; f_p)$
e_2	$(e_2; f_1)$	$(e_2; f_2)$	$\dots$	$(e_2; f_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_n	$(e_n; f_1)$	$(e_n; f_2)$	$\dots$	$(e_n; f_p)$

Le nombre d'éléments de $E \times F$ est le nombre de cases du tableau, c'est-à-dire $n \times p = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$.

Corollaire 17.9

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Card}(E^p) = (\operatorname{Card} E)^p$.

II.4. Principe additif, principe multiplicatif

Méthode

Le ***principe additif*** de dénombrement est l'utilisation de la formule 17.7 aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles vérifiant ***une ou plusieurs propriétés données*** : choisir les éléments vérifiant une première propriété **ou** une seconde propriété **ou**...

Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***diagrammes de Venn*** (cf. chapitre 2 section II.7.).

Le ***principe multiplicatif*** de dénombrement est l'utilisation de la propriété 17.8 et de son corollaire aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles résultant ***de choix successifs*** : on choisit un premier élément PUIS un deuxième élément PUIS...

Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***arbres de choix***.

Ex. 17.5 Combien y a-t-il de mots possibles formés avec 2 lettres de l'alphabet ?
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres commençant par la lettre a ou se terminant par la lettre z.
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres distinctes ?

Cor. 17.5

III. Cardinal et applications entre ensembles finis

III.1. Applications entre ensembles finis

Théorème 17.10 (Cardinal et applications)

Soient E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Démonstration

- *Par définition de $f(E)$, chaque élément de $f(E)$ possède au moins un antécédent dans E. La propriété* $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ *s'en déduit immédiatement avec égalité si et seulement si* $\forall y \in f(E), \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) = 1$, *c'est-à-dire si et seulement si f injective.*
- *Si f est surjective alors $F = f(E)$ donc* $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$ *d'après le point précédent.*
- *Supposons f injective. Comme $f(E) \subset E$, on déduit du premier point que* $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$ *d'après la proposition 17.6.*
- *Si f est bijective, elle est injective et surjective, donc* $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ *donc* $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Théorème 17.11 (Applications entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles ***finis***, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors
(f injective) $\Leftrightarrow$ (f surjective) $\Leftrightarrow$ (f bijective).

Démonstration

- *Si f est bijective, elle est par définition injective et surjective. Il suffit donc de démontrer que si f est surjective alors elle est injective et réciproquement.*
- *Supposons f injective. Alors* $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F$ *donc $f(E) = F$ d'après la proposition 17.6. Donc f est surjective.*
- *Supposons f surjective. Alors* $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ *donc f est injective d'après le théorème précédent.*

Important !

Ce théorème est faux si E et F n'ont pas le même cardinal ou s'ils sont infinis.

Méthode

Le théorème 17.10 s'utilise de la façon suivante : pour dénombrer un ensemble fini, on peut montrer qu'il existe une ***bijection*** entre cet ensemble et un ensemble dont on connaît le nombre d'éléments.
En pratique, on ne justifie pas qu'il s'agit effectivement d'une bijection et on rédige simplement par
« ***Il y a autant de...*** »

Ex. 17.6 Combien un n-gone (c'est-à-dire un polygone à n côtés) convexe (c'est-à-dire sans angle « rentrant ») possède-t-il de diagonales ?

Cor. 17.6

III.2. Corollaire : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet

Méthode

On appelle ***principe des tiroirs ou principe de Dirichlet*** le principe selon lequel
« Si on range n objets dans p tiroirs avec $n > p$, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus. »
Ce principe est la contraposée du théorème 17.10 :
E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$ alors f n'est pas injective.
En pratique, dans des exercices aux énoncés similaires, on démontrera la contraposée de l'énoncé.

Ex. 17.7 Montrer que dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

Cor. 17.7

III.3. Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Théorème 17.12

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card} \mathcal{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration

Remarque

En notant $n = \operatorname{Card} E$, ***il y a donc autant*** d'applications dans $\mathcal{F}(E, F)$ que de n-uplets dans F^n.
C'est la raison pour laquelle $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E.

III.4. Cardinal de l'ensemble des parties

Théorème 17.13

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et son cardinal vaut

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$$

Démonstration

IV. Listes

IV.1. p-listes d'éléments distincts d'un ensemble

Définition 17.14

Soit E un ensemble et p un entier.
p-liste d'éléments de E, ***p-uplet d'éléments de E*** et ***famille de p éléments de E*** sont des synonymes.
On appelle ***p-liste d'éléments distincts*** de E tout p-uplet $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de E vérifiant $\forall(i;j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.
Plus simplement, ce sont les listes ***de p éléments de E, sans répétition possible d'un même élément***.

Théorème 17.15

Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n vaut

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Démonstration

IV.2. Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Théorème 17.16

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $n = \operatorname{Card} E > 0$ et $p = \operatorname{Card} F > 0$.
Alors le nombre d'injections de $F \to E$ est A_n^p.

Démonstration

IV.3. Nombre de bijections entre deux ensembles finis

Théorème 17.17

Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de bijections de E dans F vaut $A_n^n = n!$

Démonstration

Définition 17.18

Dans le cas particulier où $E = F$, les bijections sont appelées ***permutations*** de E. Le nombre de permutations d'une ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est donc $n!$.

Notation

L'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est noté $\mathfrak{S}(E)$.
L'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est noté $\mathfrak{S}_n$.
Les permutations d'un ensemble fini se notent de la façon suivante : on écrit sur une ligne les éléments de E, et sous chaque élément, son image.

Ex. 17.8 Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et la permutation $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer $\phi \circ \phi(a)$, $\phi \circ \phi(b)$, $\phi \circ \phi(c)$. Que vaut $\phi \circ \phi$?

Cor. 17.8

V. Combinaisons

V.1. Définition

Définition 17.19

Sous-ensemble, partie, combinaison sont des synonymes. Plus précisément :
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle ***combinaison*** de E tout sous-ensemble de E.
De même, on appelle ***combinaison de*** p ***éléments*** de E tout sous-ensemble de E de cardinal p.

V.2. Expression du nombre de combinaisons

Proposition 17.20

Pour $\operatorname{Card} E = n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$, il y a

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons de p éléments de E.

Démonstration

Propriété 17.21

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1; n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Corollaire 17.22

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Ex. 17.9 On appelle ***partition d'un entier*** n ***strictement positif*** toute écriture de n comme somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, il y a quatre partitions de 3 qui sont : $3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$.
Ou encore, il y a huit partitions de 4 qui sont : $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.
Montrer qu'il y a 2^{n-1} partitions de $n \in \mathbb{N}^*$.

Cor. 17.9

V.3. Utilisation : calcul du nombre d'anagrammes d'un mot

Méthode

De nombreux problèmes de dénombrement peuvent être modélisés par le calcul du nombre d'anagrammes d'un mot donné.
Les méthodes suivantes peuvent être utilisées pour ces calculs :

- lorsque toutes les lettres du mot sont distinctes, le nombre d'anagrammes ***est le nombre de permutations des lettres du mot***;
- lorsque plusieurs lettres sont identiques, dénombrer les anagrammes ***revient à choisir***

d'abord la position des lettres identiques parmi les positions possibles, puis à obtenir le nombre de permutations des lettres restantes.

Ex. 17.10

1) Combien y a-t-il de mots formés des 26 lettres de l'alphabet, utilisées chacune une seule fois ?
2) Combien y a-t-il de mots de 26 lettres (choisies dans l'alphabet, sans autre contrainte) ?
3) Combien y a-t-il de mots de 26 lettres ne contenant que des A et des B ?
4) Combien y a-t-il de mots de 26 lettres contenant exactement 13 lettres A et 13 lettres B ?
5) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot $ABAISSER$?