Programme de colles n°27

# Du 21 au 24 mai

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe.
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, 1+\sqrt{xy} \leqslant \sqrt{(1+x)(1+y)}$.
2) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $u$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que si $u$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $f(l) = l$.
3) Soit $f$ une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}$ et $u$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $u_1 \leqslant u_0$, alors $u$ est décroissante.
   Que peut-on dire de $u$ dans le cas général ?
4) Révisions : théorème d'obtention d'une formule explicite pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou arithmético-géométriques (au choix du colleur).
5) ***Soit*** $n \in \mathbb{N}$ ***et*** $E_n$ ***l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à*** $n$ ***dont les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.***
   ***Calculer*** $\mathrm{Card}(E_n)$.
6) ***Combien un*** $n$***-gone convexe a-t-il de diagonales ? Le démontrer.***
7) ***Donner*** $\mathcal{P}\big(\{a;b;c\}\big)$.
   ***Soit*** $E$ ***un ensemble à*** $n$ ***éléments. Que vaut*** $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big)$ ***? Le démontrer.***
8) ***Nombre d'injections d'un ensemble*** $E$ ***à*** $p$ ***éléments dans un ensemble*** $F$ ***à*** $n$ ***éléments ? Le démontrer.***
   ***Nombre de permutations d'un ensemble*** $E$ ***à*** $n$ ***éléments ? (sans démonstration)***
9) ***Définition des coefficients binomiaux et interprétation combinatoire.***
   ***Combien y a-t-il de mots de 9 lettres composés de 3 lettres*** $A$***, 3 lettres*** $B$ ***et 3 lettres*** $C$ ***? (ou autre exercice du même style au choix du colleur)***

## Programme pour les exercices

Convexité, suites récurrentes.
***Dénombrement.***