Matrices

I. Interprétations géométriques des matrices

Ex. 18.1 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (3x-y;-x) \end{array} \right.$ et $\mathcal{B} = \big((1;1);(-1;2)\big)$.

a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{B}$ en est une base.

b. Donner la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.2 Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Montrer que s est une symétrie dont on déterminera les sous-espaces caractéristiques.

Ex. 18.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\Delta : P \in E \mapsto P'$ et $\phi : P \in E \mapsto P - P'$.

a. Montrer que Δ et ϕ sont des endomorphismes de E et donner leur matrice dans la base canonique.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\Delta)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ ces matrices.

b. Que peut-on dire de $\Delta^4 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta$?

c. Déduire de la question précédente que :
- A n'est pas inversible ;
- B est inversible - on donnera l'inverse de B sans utiliser la méthode du pivot de Gauss.

II. Isomorphismes et changements de bases

Ex. 18.4 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme $f : E \to E$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

Ex. 18.5 [**] $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent. Ce résultat se généralise-t-il aux matrices telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda AB = A + B$?

Ex. 18.6 Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.

a. Déterminer la nature géométrique de ψ.

b. En déduire N^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 18.7 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n rapportés aux bases $\mathcal{B} = (e_1; e_2; ...; e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1; f_2; ...; f_n)$.
Soit $\phi : E \to F$ dont la matrice est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Exprimer, pour $j \in [\![1;n]\!]$, $\phi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

b. On pose $S_j = \sum_{k=1}^{j} f_k$. Montrer que pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$ on a $\phi(e_{j+1}) = \phi(e_j) + S_{j+1}$.

c. En déduire une expression de $\phi(e_j)$ comme une somme double.

d. Montrer que $\phi(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.

e. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

III. Matrices de changement de bases

Ex. 18.8 Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = \left(X^2+1; X^2+iX; X^2-iX\right)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$.
On note P_k les polynômes de $\mathcal{B}$.

a. Simplifier $S_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$ puis $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} P_k$.

b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

c. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{-7}{2}u_n + 6v_n \\ v_{n+1} &= -3u_n + 5v_n \end{cases}$$

a. Calculer u_1, u_2, v_1, v_2.

b. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n.

c. Soit $Q = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à Q.
Soit $\mathcal{B} = \left((3;2);(4;3)\right)$.
- Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
- En déduire une expression simple de Q^n.

d. À l'aide des deux questions précédentes, expliciter W_n en fonction de n.

e. Montrer que les suites u et v convergent et donner leurs limites.

IV. Noyau, image et rang

Ex. 18.11

a. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Im} f$ et le rang de A.

b. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base et un système d'équations de $\operatorname{Ker} g$, une base et une équation de $\operatorname{Im} g$ et le rang de B.

Ex. 18.12 Soit A une matrice réelle d'ordre n et de rang 1.

a. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = XY^{\mathrm{T}}$.

b. En déduire A^k en fonction de A pour $k \geq 1$.

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A+I_n$ soit inversible et exprimer alors son inverse en fonction de A.

Ex. 18.13 (Cor.) Soient $p \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang de la matrice $\left((i+j+p)^2\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$?

Ex. 18.14 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique, $\mathcal{B} = \big(1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2)\big)$ et

$$\phi : \begin{cases} E & \to & E \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{3} P(k)X^k = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 + P(3)X^3 \end{cases}$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.

b. Donner $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$.

c. Donner $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

d. Donner $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi)$.

e. Quelle formule relie les matrices A, B et P ?

f. Déduire des questions précédentes que ϕ est bijective.

g. Ce résultat peut-il se généraliser ?

Ex. 18.15 ***Extrait écrit Centrale Math 1 2018*** Soient n un entier supérieur à 2, $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$A(t_1, t_2, ..., t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} & t_n \\ t_n & \ddots & \ddots & & t_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ t_3 & & \ddots & & \vdots \\ t_2 & t_3 & \cdots & t_n & t_1 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

a. Calculer M^2, ..., M^n. Montrer que M est inversible, donner M^{-1}.

b. Donner un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $P(M) = 0$.

c. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q_A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A(t_1, t_2, ..., t_n) = Q_A(M)$.

d. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer à l'aide d'une division euclidienne de Q par un polynôme bien choisi qu'il existe $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $Q(M) = A(t_1, t_2, ..., t_n)$.

e. Montrer que $\mathcal{D}_n = \{A(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et transposition.

f. Donner une base de $\mathcal{D}_n$ ainsi que sa dimension.

Ex. 18.16 (Cor.) On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_{X-1}^{X} P(t)\mathrm{d}t \end{cases}.$$

a. Montrer que Φ est linéaire.

b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg \Phi(P) = \deg P$.

c. En déduire Φ est un automorphisme d'espaces vectoriels.

d. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on note Φ_n la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0, P_1, ..., P_n)$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par Φ_n. Les polynômes P_k sont appelés ***polynômes de Bernoulli***.
Calculer les quatre premiers polynômes de Bernoulli.

e. Démontrer que pour tout $n, N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{P_{n+1}(N) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

f. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3$?

Cor. 18.13 : Soit $A = \left((i+j+p)^2\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Soient i et j deux entiers vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
$(i+j+p)^2 = i^2+2\times i\times j+j^2+2(i+j)p+p^2 = \left(j^2+2jp+p^2\right)+i\times(2j+2p)+i^2$.
Notons $A_1, ..., A_j, ..., A_n$ les colonnes de A de sorte que $A = (A_1|...|A_n)$.

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice à une colonne et n lignes composée de 1.

Notons $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix} = \left(i^2\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Le développement $(i+j+p)^2 = \left(j^2+2jp+p^2\right)+i\times(2j+2p)+i^2$ se réécrit pour les colonnes de A de la façon suivante :

$$A_j = \left(j^2+2jp+p^2\right)C_1 + (2j+2p)\,C_2 + C_3$$

Donc la famille $\mathcal{F} = (C_1; C_2; C_3)$ est une famille génératrice des colonnes de A, c'est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} A$.
Or il s'agit d'une famille libre (ce que nous savons car nous avons déjà traité le cas $n = 3$).
Donc

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A = 3$$

Cor. 18.16 :

a. $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$\Phi(\lambda P+Q) = \int_{X-1}^{X} \lambda P(t)+Q(t)\mathrm{d}t = \lambda\int_{X-1}^{X} P(t)\mathrm{d}t + \int_{X-1}^{X} Q(t)\mathrm{d}t = \lambda\Phi(P)+\Phi(Q)$.
Ce qui s'énonce aussi plus simplement : Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

b. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists n \in \mathbb{N}, P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Or Φ étant linéaire, on a alors $\Phi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi\left(X^i\right)$. Il suffit donc de montrer que Φ conserve le degré des polynômes de la base canonique, la somme de deux polynômes de degrés distincts étant égale au plus grand des degrés des deux polynômes.
Or

$$\begin{aligned} \Phi\left(X^i\right) &= \int_{X-1}^{X} t^i \mathrm{d}t \\ &= \frac{X^{i+1}-(X-1)^{i+1}}{i+1} \\ &= \frac{-\sum_{k=0}^{i}\binom{i+1}{k}X^k(-1)^{i+1-k}}{i+1} \end{aligned} \quad \text{est de degré } i.$$

Donc $\forall i \in \mathbb{N}, \deg\Phi\left(X^i\right) = \deg X^i \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg\Phi(P) = \deg P$.

c. $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie, ce qui pose quelques soucis supplémentaires que l'on aimerait éviter. On se restreint donc à $\Phi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \Phi_n(P) = \Phi(P)$ qui est aussi un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question précédente. Démontrer que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ revient donc à démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme Φ_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut alors utiliser le théorème :
Φ_n est bijective$\Leftrightarrow$ Φ_n est injective$\Leftrightarrow$ Φ_n est surjective.
La question devient alors simple : on montre que Φ_n est injective en calculant son noyau :

$$\begin{aligned} \ker\Phi_n &= \{P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_n[X], \deg\Phi(P) = -\infty\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \deg P = -\infty\} \\ &= \{0\} \end{aligned}.$$

Donc Φ est un automorphisme d'espace vectoriel.

d. $P_0 = 1, P_1 = \frac{1}{2}+X, P_2 = \frac{1}{6}+X+X^2, P_3 = \frac{X}{2}+\frac{3X^2}{2}+X^3$ (ces résultats n'étant pas tout à fait immédiats puisqu'il faut pour les obtenir inverser une matrice $(4,4)$ triangulaire supérieure de diagonale égale à 1).

e. D'une part, $\Phi\left(P_n(X)-P_n(X-1)\right) = X^n-(X-1)^n$ par linéarité de Φ et définition des polynômes de Bernoulli.
D'autre part, $\Phi\left(nX^{n-1}\right) = n\frac{X^n-(X-1)^n}{n} = X^n-(X-1)^n$ par définition de Φ.
Φ étant par ailleurs bijective, on en déduit que $P_n(X)-P_n(X-1) = nX^{n-1}$ d'où,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} k^n &= \frac{\sum_{k=1}^{N} P_{n+1}(k)-P_{n+1}(k-1)}{n+1} \\ &= \frac{P_{n+1}(N)-P_{n+1}(0)}{n+1} \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

f. Après calcul de P_4, on obtient la formule classique $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$.