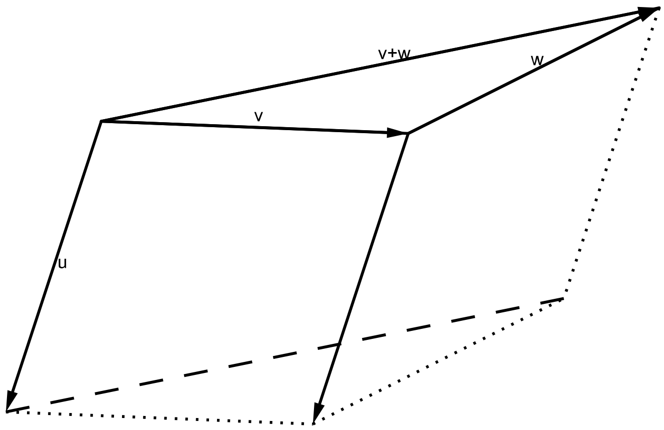
Maths - Chapitre 20

Déterminant

Ex. 20.1 Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_1$ et $BCEF$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_2$. Quelles sont les valeurs possibles de l'aire du parallélogramme $AFED$?

La notion de déterminant est une généralisation des notions d'aire et de volume. Comme dans les précédents chapitres d'algèbre, nous allons le définir ***par ses propriétés opératoires***. Il est cependant important de comprendre que ces propriétés résultent de l'origine géométrique de cette notion. Pour comprendre cela, intéressons-nous à la notion d'aire.
Considérons le plan $E = \mathbb{R}^2$ et u, v deux vecteurs de E. Notons $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire ***algébrique*** (c'est-à-dire que cette aire peut-être positive ou négative) du parallélogramme formé par les vecteurs u et v.



- ***L'aire est bilinéaire***
  $\mathcal{A}(u, v + w) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w)$: ....
  ....
  ....
  $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda\mathcal{A}(u, v)$: ....
- ***L'aire d'un parallélogramme aplati est nulle*** : $\mathcal{A}(u, u) =$.
- ***Ceci a pour conséquence que l'aire est antisymétrique*** :
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) =$ .. d'une part et
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) =$ .... d'autre part,
  d'où l'on déduit que
  ....

Le but de ce chapitre est de montrer que cette notion, si on l'envisage comme nous venons de le faire au travers de ses propriétés opératoires, se généralise non seulement aux calculs de

volumes de l'espace $\mathbb{R}^3$ mais aussi aux ***espaces de dimensions supérieures*** : c'est la notion de déterminant d'une matrice carrée.
Nous verrons ensuite les propriétés opératoires de cette notion, conduisant notamment à un certain nombre de méthodes de calcul pour le déterminant d'une matrice carrée. Enfin, nous verrons que cette notion se généralise davantage encore en définissant le déterminant des endomorphismes en dimension finie.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

I.1. Théorème-définition

Théorème 20.1

Il existe une ***unique*** application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f est linéaire par rapport à ***chaque colonne de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|\lambda C_i + \mu C_i'|...|C_n\right) = \lambda f\left(C_1|..|C_i|...|C_n\right) + \mu f\left(C_1|..|C_i'|...|C_n\right)$
- f est antisymétrique (ou encore alterné) par rapport aux ***colonnes de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = -f\left(C_1|..|C_j|...|C_i|...|C_n\right)$
- $f(I_n) = 1$

Démonstration hors programme

Notation

Cette application est notée det.

Remarque

La dernière condition revient en fait à se donner ....
....

I.2. Propriétés

Propriété 20.2

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration

Corollaire 20.3

Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.

Démonstration

Propriété 20.4

Quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration

Propriété 20.5

Ajouter à une colonne d'une matrice ***une combinaison linéaire des autres colonnes*** ne change pas la valeur de son déterminant.

Démonstration

Ex. 20.2 Calculer les déterminants suivants :

$A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Cor. 20.2

Corollaire 20.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Démonstration

Ex. 20.3

1) Vrai ou faux : soit A une matrice carré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes. Alors

$$\det A = \det(C_1 - C_2 | C_2 - C_3 | ... | C_{n-1} - C_n | C_n - C_1)$$

2) Calculer $\det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$.

3) Calculer $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

Cor. 20.3

I.3. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;
4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$;
8) $\mathrm{rg}(A) = n$;
9) $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$.

I.4. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 20.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Démonstration

Ex. 20.4

1) Calculer $\det \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$.

2) Donner les valeurs de x pour lesquelles $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

3) Dans les cas où A_x n'est pas inversible, calculer $\mathrm{Ker}(A_x)$ et $\mathrm{rg}(A_x)$.

Cor. 20.4

I.5. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 20.8

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$*** et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.
Autrement dit,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Théorème 20.9 (Caractérisation des bases)

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Démonstration

I.6. Déterminant d'un produit de matrices

Propriété 20.10

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration

Corollaire 20.11

Quelle que soit la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration

I.7. Déterminant de la transposée

Propriété 20.12

Quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \det(A)$$

Démonstration

Corollaire 20.13

Les théorèmes et propriétés du déterminant énoncées sur les colonnes de sa variable sont aussi valables pour les lignes de sa variable.

I.8. Développement suivant une ligne ou une colonne

Notation

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A en ôtant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.
Autrement dit, $A_{i,j} = (a_{k,l})_{\substack{(k,l)\in[\![1;n]\!]^2 \\ k\neq i, l\neq j}}$.

Propriété 20.14 (Développement suivant une ligne ou une colonne)

Quel que soit $i \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

De même, quel que soit $j \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Démonstration hors programme

Ex. 20.5 Calculer le déterminant de la matrice $M_n(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$.

Cor. 20.5

Donnons à titre d'exemple l'application de cette formule au calcul des matrices d'ordre 3 :

Méthode : Techniques de calcul du déterminant

1) Développement par rapport à la première colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$. . . . .
2) Développement par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3) Développement par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4) Développement par rapport aux lignes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5) En pratique on mémorise le développement suivant une ligne ou une colonne en retenant le schéma $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \ddots & \\ + & - & + & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & - \\ & & & - & + \end{vmatrix}$

Méthode : Calcul pratique du déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque, les propriétés précédentes sont ***généralement*** utilisées selon l'une des deux méthodes suivantes :

1) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener, à l'aide de la propriété précédente, au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre inférieur (souvent $n-1$) et on fait une récurrence :

$$\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \lambda \det(A_{n-1})$$

2) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire qui est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Une des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes que l'on rencontre souvent est d'effectuer la somme des lignes (ou des colonnes) dans l'une des lignes (respectivement colonne) de la matrice de départ :

$$\det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|C_n\right) = \det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|\sum_{j=1}^{n} C_j\right)$$

Ex. 20.6 Soit $A(X) = \begin{pmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & 1+X^2 & X \\ 0 & \cdots & 0 & X & 1+X^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $D(X) = \det A(X)$ est un polynôme, donner son degré.
Calculer $D(X)$.

Cor. 20.6

II. Déterminant d'un endomorphisme

II.1. Définition

Théorème 20.15 (Indépendance vis-à-vis de la base choisie)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ deux bases de E, f un endomorphisme de E.
Alors

$$\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\big)$$

Démonstration

Définition 20.16 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini. On appelle ***déterminant d'un endomorphisme*** le déterminant de sa matrice ***dans une base quelconque de*** E (on choisit la même base au départ et à l'arrivée).

Notation

On note $\det f$ le déterminant de l'endomorphisme f.

II.2. Propriétés

Propriété 20.17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.
On a les propriétés suivantes :

- $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E ;
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$;
- $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$;
- soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E :
$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{F})\big) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big)$$

Démonstration

Ex. 20.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & M^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$.
Calculer $\det \psi$.

Cor. 20.7

Corrections