Déterminant

I. Déterminant d'une matrice, d'une famille de vecteurs

Ex. 20.1 Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a^p & a^n \\ b & b^p & b^n \\ c & c^p & c^n \end{vmatrix}$$

Ex. 20.2 Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

Ex. 20.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Calculer $\det_{\mathcal{B}}(e_2 + e_3; e_3 + e_1; e_1 + e_2)$ puis
$\det_{\mathcal{B}}(e_1 + \lambda e_2; e_2 + \lambda e_3; e_3 + \lambda e_1)$.

Ex. 20.4 On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Soient $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = 9X - 5$.

a. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_i)_{i \leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.

On pourra éventuellement traiter les deux question en même temps.

Ex. 20.5 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $((m+1; m-1); (4; -4+2m))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 20.6 Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique est nul en dimension 3.
Est-ce le cas en dimension $n = 2$?
Généraliser aux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 20.7 On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer A^n en fonction des termes de la suite de Fibonacci.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Ex. 20.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n+1} = 0_{2n+1}$.
Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_2 = 0_2$ puis une matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0_{2n}$.

Ex. 20.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_{ij} = \pm 1$.
Montrer que 2^{n-1} divise $\det A$.

Ex. 20.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_{i,j} = (-1)^{\max(i,j)}$.
Calculer $\det A$.

Ex. 20.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i; j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
On note $\Delta_n = \det(A_n)$.

a. Exprimer Δ_n en fonction de n et montrer que A_n est inversible.

b. Soit $X = (x_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On suppose que $A_n X$ est constitué de coefficients positifs ou nuls.

i. Montrer que $x_n \geqslant 0$.

ii. Montrer que $\forall i \in [\![1;n]\!]\,, x_i \geqslant 0$.

c. Montrer que A_n^{-1} est composée de coefficients positifs ou nuls.

d. Soit $B_n = A_n - I_n$. On note $D_n = \det(B_n)$.
Montrer que $D_{n+3} = -D_n$.
En déduire que B_n est inversible si et seulement si $n+1$ n'est pas un multiple de 3.

Ex. 20.12 ***Centrale 2017 PSI Maths 1 - Extrait***
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice M de E, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.
On dit que f_M est ***cyclique*** s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ tel que $\left(u; f_M(u); ...; f_M^{n-1}(u)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. u est alors appelé ***vecteur cyclique*** de f_M.
On dit que f_M est ***diagonalisable*** s'il existe une base $(e_1; ...; e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et un n-uplet $(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\forall i \in [\![1;n]\!]\,, f_M(e_i) = \lambda_i e_i$$

Autrement dit, f_M est diagonalisable si et seulement si f_M est une composée d'affinités.
On suppose dans la suite que f_M est diagonalisable et on note $(e_1; ...; e_n)$ la base de diagonalisation et $(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les scalaires associés.
Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in \mathbb{C}^n$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1; ...; u_n; \lambda_1; ...; \lambda_n)$ pour que $\left(u; f_M(u); ...; f_M^{n-1}(u)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

b. Soit $A(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ où $x_1, ..., x_{n-1}$ sont des nombres complexes.

i. Montrer que $A(x)$ est un polynôme en x dont on précisera le degré.

ii. Montrer que $\forall i \in [\![1;n-1]\!]\,, A(x_i) = 0$.

iii. En déduire que
$A(x) = a\,(x_1, ..., x_{n-1})\,(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1}) = a\,(x_1, ..., x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)$
où $a\,(x_1, ..., x_{n-1})$ est un complexe ne dépendant que de la valeur de $x_1, ..., x_{n-1}$.

iv. Soit $x_n \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$A(x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

c. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

II. Déterminant d'un endomorphisme, divers

Ex. 20.13 On se place dans $\mathbb{R}$.
Déterminer le rang des systèmes suivants puis les résoudre :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y - 2z = b \\ x + y - 3z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + z + t = 2 \\ y + z + t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Ex. 20.14 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(P) = (X+1)^2 P'' + (X-1)P' + P$$

f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?