Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

Ex. 21.1 On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à $n \geqslant 2$.

a. On tire deux boules dans l'urne ***sans remise***. Soit X_n la variable aléatoire indiquant le plus grand des deux numéros tirés. Calculer la loi de X_n.

b. On tire deux boules dans l'urne ***avec remise***. Soit Y_n la variable aléatoire indiquant le plus grand des deux numéros tirés. Calculer la loi de Y_n.

Ex. 21.2 (Cor.) Un système de communication comporte n composants. Chaque composant a une probabilité p d'être en bon état de fonctionnement, indépendamment des autres.
Le système lui-même fonctionne si au moins la moitié de ses composants est en bon état de fonctionnement.

a. Pour quelles valeurs de p un système à 5 composants a-t-il une probabilité de fonctionner supérieure à un système à 3 composants ?

b. D'une manière générale, dans quels cas un système à $2k+1$ composants est-il préférable à un système à $2k-1$ composants ?

Ex. 21.3 ***Problème des allumettes de Banach*** Un mathématicien se trouve être également fumeur de pipe. Il a dans ses deux poches une boîtes d'allumettes. Quand il a besoin d'allumer sa pipe, il a une chance sur deux de chercher une allumette dans sa poche gauche, et une chance sur deux de la chercher dans sa poche droite.
Il découvre subitement que la boîte d'allumette qu'il a choisie est vide. Les deux boîtes contenaient N allumettes au départ.
Quelle est la probabilité qu'il lui reste k allumettes dans l'autre boîte ($k \in [\![1;n]\!]$) ?

II. Couples de variables aléatoires

Ex. 21.4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé (Ω, P) et suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n, 1/4)$ et $\mathcal{B}(n, 3/4)$.
Soit pour tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$, on note
$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

a. Calculer la probabilité que A soit inversible.

b. Calculer la probabilité que A^{-1} soit à coefficients entiers, sachant que A est inversible.

Ex. 21.5 Dans un sac il y a $n-2$ boules noires et 2 boules blanches ($n \geqslant 3$). On tire successivement et sans remise toutes les boules du sac et on note X le rang de la première boule blanche tirée et Y le rang de la seconde.

a. Loi du couple (X, Y).

b. Loi de X, espérance et variance. Même question pour Y.

Ex. 21.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, r \in]0;1[$. Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et Y une variable aléatoire telle que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la loi de Y sachant que $(X = k)$ est $\mathcal{B}(k, r)$.
Donner la loi de Y.

III. Espérance, variance

Ex. 21.7 Soit A_1, A_2, ..., A_n des événements quelconques et C_i :« au moins i événements de la famille $(A_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ se produisent ».
Montrer que $\sum_{i=1}^n P(C_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$
Indication : introduire une v.a. dont les deux membres sont l'espérance.

Ex. 21.8 On considère $p \geqslant 2$ boîtes B_1, B_2, ..., B_p. Dans l'une d'entre elles se trouve un objet O. On ouvre successivement et au hasard les boîtes jusqu'à trouver l'objet O.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de boîtes ouvertes.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Ex. 21.9 Pour allumer un feu, on dispose de n allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette est égale à $p \in]0;1[$.
On finit par allumer le feu.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'allumettes restantes.
Calculer la loi de X, son espérance et sa variance.

Corrections

Cor. 21.2 :

a.

b. Mise en équations : un système à $2k+1$ composants est fonctionnel si au moins $k+1$ composants fonctionnent. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants fonctionnels : X suit une loi binomiale de paramètre p. Le système est fonctionnel avec une probabilité
$$\sum_{i=k+1}^{2k+1} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i(1-p)^{2k+1-i}.$$
Pour qu'un système à $2k+1$ composants soit préférable à un système à $2k-1$ composants il faut donc que
$$(E) : \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i(1-p)^{2k+1-i} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i(1-p)^{2k-1-i} > 0$$
Soit
$$P = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i}$$
et $Q = \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i}$
$$\begin{aligned} P+Q &= \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i} \\ &= (X+1-X)^{2k+1} - (X+1-X)^{2k-1} = 0 \end{aligned}$$
Par ailleurs, $P = X^k\left(\sum_{i=1}^{k+1} \binom{2k+1}{i+k} X^i(1-X)^{k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i+k} X^i(1-X)^{k-1-i}\right)$
donc $X^k|P$.
De même, $(1-X)^k|Q$.
Comme $P+Q=0$, c'est-à-dire $P=-Q$, $(1-X)^k|P$.
Montrons enfin que $\frac{1}{2}$ est racine de P :
$$\begin{aligned} P\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{2k+1-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{2k-1-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= Q\left(\tfrac{1}{2}\right) = -Q\left(\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$
Donc $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Or $\deg(P) \leqslant 2k+1$ (somme de polynômes de degrés inférieurs à $2k+1$) donc
$P = aX^k(1-X)^k(2X-1)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Plus précisément,
$$a = \frac{\sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i}(-1)^{k+1-i}}{2} = \frac{\sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i+k+1}(-1)^i}{2} > 0$$ car pour tout $i \in [\![0;k-1]\!]$, $\binom{2k+1}{i+k+1} > \binom{2k+1}{i+k+2}$.

Finalement, $(E) \Leftrightarrow P(p) > 0 \Leftrightarrow ap^k(1-p)^k(2p-1) > 0 \Leftrightarrow p > \dfrac{1}{2}$.
Les valeurs de p pour lesquelles un système à $2k+1$ composants est préférable à un système à $2k-1$ composants sont donc $\left]\frac{1}{2};1\right]$.